

**УПОРЯДОЧЕННЫЕ
МНОЖЕСТВА
И РЕШЕТКИ**

1871-1872

1873-1874

1875-1876

УПОРЯДОЧЕННЫЕ МНОЖЕСТВА И РЕШЕТКИ

Современное состояние теории решеток

МЕЖВУЗОВСКИЙ НАУЧНЫЙ СБОРНИК

Издательство
Саратовского университета
1983

УДК 519.48
У 67

Упорядоченные множества и решетки. Современное состояние теории решеток. Межвуз. науч. сб. (вып. 7). Изд-во Саратов. ун-та, 1983, 144 с.

В предлагаемом выпуске сборника «Упорядоченные множества и решетки» помещается серия обзоров по теории решеток (структур). Эти обзоры составлены в основном по материалам реферативного журнала «Математика» за период с июля 1973 года по декабрь 1977 года включительно. Они тесно связаны с предыдущими обзорами по теории решеток, появившимися в серии «Итоги науки» и в третьем выпуске настоящего сборника.

Сборник представляет интерес для научных работников, аспирантов и студентов, которые занимаются современной алгеброй.

Редакционная коллегия:

В. В. Вагнер, А. И. Векслер, М. М. Глухов,
Г. И. Житомирский, Ю. Н. Мухин, В. Н. Салий (отв.
ред.), Л. А. Скорняков.

У $\frac{223-13}{176(02)-83}$ 86—81.1702070000

ПРЕДИСЛОВИЕ

В настоящем выпуске сборника «Упорядоченные множества и решетки» помещается серия обзоров по теории решеток (структур). Эти обзоры составлены в основном по материалам реферативного журнала «Математика» за период с июля 1973 г. по декабрь 1977 г. включительно. Они примыкают к появившимся в серии «Итоги науки» обзорам Л. А. Скорнякова [67, 6A188] и М. М. Глухова, И. В. Стеллецкого, Т. С. Фофановой [70, 7A270] и к опубликованным в третьем выпуске настоящего сборника обзорам В. В. Пашенкова [76, 10A198], Т. С. Фофановой [76, 10A200], В. И. Игошина и Т. С. Фофановой [76, 10A197], Г. И. Житомирского [76, 10A202], В. Н. Салия [76, 10A201].

Авторы стремились возможно более полно отразить работы, посвященные собственно исследованию решеток, а также результаты, полученные в других областях алгебры с существенным использованием теории решеток. Некоторые разделы, тесно связанные с теорией решеток, сознательно оставлены вне рассмотрения (векторные решетки, решетки, связанные с проективными плоскостями, упорядоченности отношений сводимости, специальные свойства вполне упорядоченных множеств, упорядоченные алгебраические системы, полугрупповые свойства полурешеток и некоторые другие), в связи с тем, что одни из них уже освещались в обзорах серии «Итоги науки», другие заслуживают специального внимания.

При изложении результатов работ приводятся фамилии авторов (в русской транскрипции) и ссылки на реферативный журнал «Математика», в которых указываются две последние цифры года, а затем номер соответствующего реферата. Для нереферированных работ в сносках дается библиографическое описание.

Сохранены некоторые несущественные различия в алгебраической терминологии авторов, но из одинаково распространенных синонимов термин «решетка» предпочтен термину «структура», а термин «упорядоченное множество» — термину «частично упорядоченное множество».

Обзоры печатаются под общей редакцией Л. А. Скорнякова и В. Н. Салия.

БУЛЕВЫ АЛГЕБРЫ

Настоящий обзор является продолжением обзора [76, 10A198]. Отметим монографии по булевым алгебрам (далее б. а.) и статьи, носящие в основном прикладной или популярный характер: Халмош [75, 6A422], перепечатка этой же книги [75, 8A355], Негрепонтис [75, 6A596], Буке [73, 8A264], Сесма [77, 7A286], Граф [74, 9A335], Штромбах, Эмде, Райерсбах [75, 3A43], Джекобсон [76, 1A170], Саут [75, 5A281], [76, 7A392], Абян [77, 2A355], Хеберлен [75, 3A358], Фриштацки, Хлавати [75, 4A79], Варле [75, 5A289], где собраны публикации автора за 1972 год, Беран [75, 10A312], Росси [74, 5A327], Моргадо [75, 10A318], Серфати [75, 10A321], в которой предпринимается попытка на основании общей теории б. а. изучать алгебры Поста; Камфорт, Негрепонтис [77, 2A51], где в значительной степени помимо б. а. изучаются ультра-фильтры и модели. Примерно такого же профиля их работа [75, 10A104], в которой формулируется ряд проблем П. Э. Коэна. Интересен доклад Ханфа [75, 10A320], посвященный 70-летию Тарского; здесь решен ряд проблем, в частности относительно счетных булевых алгебр.

Об определении булевых алгебр; вопросы, связанные с математической логикой

Дойч [76, 5A291] приводит простую независимую систему аксиом для булевых алгебр. Этой же тематике посвящена работа Рютинга [75, 5A282] и работа Андрека, Немети, Паис [74, 2A293]. В другой своей работе [76, 1A333] Рютинг рассматривает алгебры $(B, \cdot, ')$ с одной бинарной и одной унарной операциями. Указан способ, как эту алгебру производными операциями превратить в булеву.

С. С. Гончаров [73, 11A290] находит необходимые и достаточные условия для суператомной б. а. быть конструктивизируемой и для б. а. — быть суператомной и конструктивизируемой; в работе [75, 10A109] изучаются конструктивизируемые и сильно конструктивизируемые б. а. Показано, что атомная б. а. автоустойчива тогда и только тогда, когда она конечна; в работе [76, 10A199] доказано, что любая конструктивизируемая бесконечная атомная б. а. имеет точно $\aleph_0$ неавтоэквивалентных конструктивизаций. В [77, 2A88] изучается во-

прос о существовании б. а. с условиями на разрешимость ограниченных теорий для их конструктивизации. А. И. Омаров [75, 4A101] дает характеристику насыщенности б. а. в смысле Ю. Л. Ершова. Адамс [73, 12A310] показывает, что всякая конструктивная решетка [73, 4A393] вложима в булеву. В работе Медисона, Нельсона [76, 5A294] приведено неконструктивное расширение счетной б. а., каждый элемент которой рекурсивен сверху и регулярен.

А. Г. Пинусом [77, 5A51] доказана разрешимость теории всех б. а. в исчислении с квантором «существует бесконечно много». Вашкевичем [75, 5A105] решена проблема о совпадении полных теорий булевых алгебр. Пахольским [73, 8A73] дано полное описание ω_1 -универсальных фильтров в терминах элементарной характеристики Ю. Л. Ершова. В частности, описываются фильтры, сохраняющие компактность.

Стеви [74, 3A236] на фиксированном множестве D , используя знаки булевых операций, индуктивно определяет термы. Пару (B, I) , где B — б. а., I — отображение $D \rightarrow B$, назовем оценкой. Терм T называется строго определенным в B , если при отображении I все предписанные в записи терма T булевы операции выполнимы в B ; если же эти операции выполнимы в нормальном пополнении E б. а. B , то назовем T слабо определенным. Два терма эквивалентны, если их значения совпадают для любой оценки, при которой оба они сильно определены. Приводится отрицательное решение проблемы Гейфмана «для любого ли слабо определенного терма существует эквивалентный ему сильно определенный терм?» Указываются ограничения, при которых аналогичный вопрос решается положительно. В работе [76, 2A46] с использованием теоремы Леви найдены условия полноты, атомности, свободы для булевых алгебр (в некотором специальном смысле).

Вильямс [75, 12A293] определяет диаграммы как множества с транзитивным отношением и наибольшим элементом в смысле этого отношения. Вводится понятие структурности между диаграммами и булевыми алгебрами и изучаются условия, при которых диаграммы рекурсивны. Б. И. Плоткин [77, 1A28] в системе ZFC строит жесткую, лишенную свободных подалгебр б. а., обладающую рядом дополнительных интересных свойств. Эмде [73, 9A54] изучает счетноуниверсальную б. а. Мостовского M (в том смысле, что любое счетное упорядоченное множество может быть вложено в M). При подходящей нумерации M становится рекурсивной алгеброй, обладающей универсальностью и для рекурсивных упорядоченных

множеств. Соответствующее вложение строится эффективно, что не удастся получить из классических результатов, использующих стоуновскую двойственность.

Грин, Такеути [77, 12A61] называют булев терм вполне разложимым, если его можно представить в такой форме, что каждая переменная входит в него только один раз. Строится алгоритм проверки этого свойства. Мияйлович [77, 12A63] также изучает булевы термы. Он доказывает теорему о представлении булевых термов и находит условие Буля-Шрёдера для совместности булевых уравнений. Кремер [75, 2A348] рассматривает класс б. а., не содержащих свободных булевых алгебр. Показано в частности, что это — радикальный класс. Изучаются свойства этого класса относительно образования сумм, произведений и слабых произведений.

Рассматривая ультрафильтры б. а., Бруна, д'Андреа [75, 3A364], доказывают эквивалентность некоторых условий для группы G , из которых наибольшее внимание заслуживает утверждение: для того, чтобы G имела булеву решетку нормальных делителей, необходимо и достаточно, чтобы G была прямым произведением своих циклических подгрупп различных простых порядков.

Топологические и гомологические вопросы

Коппельберг [73, 10A266] продолжает тематику, начатую Халмошем. Пусть P — класс проективных б. а.; K — класс б. а., являющихся произведениями конечного числа алгебр, каждая из которых есть копроизведение счетных. Ранее автором была решена проблема Халмоша: $P \neq K$. Теперь усиливается этот результат путем построения еще двух промежуточных классов. Джонс [75, 6A424] показывает, что б. а. проективна в категории полурешеток с псевдополнениями тогда и только тогда, когда она проективна в категории булевых алгебр. В. В. Пашенков [73, 11A434] строит функторы из категории полурегулярных топологических пространств в категорию б. а. (регулярных открытых множеств), наделенных некоторой топологией, и обратные функторы. Эти функторы играют ту же роль для пространств любой размерности, какую стоуновские функторы играют для нульмерных бикомпактов. В частности, развитыми методами удастся решить ряд задач, связанных с неприводимыми отображениями пространств. В. В. Федорчук [74, 2A443] изучает близкие вопросы (δ -коморфизмы). Исследования ведутся путем наделения б. а. до-

полнительным отношением «сильного» порядка (компингентности; впервые это отношение было введено де Врайсом; идейно оно примыкает к пространствам близости В. А. Ефремовича). Сложность построения указанных функторов вызвана тем, что, вообще говоря, при непрерывном отображении пространств естественно определяемое отображение б. а. регулярных открытых множеств не является гомоморфизмом. Флаксмайер [75, 4A572] исследует вопрос о том, когда это отображение — гомоморфизм.

Бэлбс, Хорн [77, 12A302] определяют понятие проективного покрытия для дистрибутивных решеток как двойственное понятие к инъективной оболочке. Среди ряда результатов отметим такой: б. а., имеющая проективное покрытие, — конечна. В работе Блока [75, 3A365] устанавливается, что категория булевых пространств и непрерывных отображений является рефлексивной подкатегорией компактных пространств, откуда, в частности, следуют некоторые результаты Бэлбса [73, 8A263].

Вопросам топологизации б. а. посвящено большое число работ. В работе Бизера [73, 10A267] фиксируется идеал I и фильтр D б. а. A . Определим на A топологию $T(I, D)$, взяв за предбазу открытых подмножеств множества $a^* \cap b^+$, где $a \in I$, $b \in D$; a^* , b^+ — главные фильтр и идеал, порожденные элементами a и b соответственно. Оказывается, что свойство топологии быть $T(I, D)$ мультипликативно и наследственно. Изучается ряд других свойств $T(I, D)$ — топологий: выясняется, когда они хаусдорфовы, когда компактны (последнее имеет место тогда и только тогда, когда A полна и атомна). Коппельберг [74, 1A292] рассматривает пополнение B свободной б. а. с несчетным множеством свободных образующих. Пусть X — максимальная цепь в B и $R(X)$ — б. а. регулярных открытых множеств цепи X , рассматриваемой как топологическое пространство с интервальной топологией. Оказывается, что б. а. B и $R(X)$ изоморфны.

А. И. Векслер [74, 1A468] в предположении континуум-гипотезы строит полную б. а. B , не являющуюся полной в σ -топологии: пусть A — алгебра всех подмножеств множества мощности алеф, I — некоторый σ -идеал, тогда в качестве B можно взять A/I . Дж. Хаджиев [74, 6A398] устанавливает, что всякая непрерывная б. а. есть фактор-алгебра дискретной. Заметим, что топологический вариант этого утверждения неверен. В другой его работе [75, 8A469] вводится некоторая топология на решетках, что позволяет получить обобщения двух теорем

Д. А. Владимирова. Бут [75, 5A481], используя технику б. а., естественным образом определяет секвенциальную и сильную секвенциальную компактность. В частности, из секвенциальной компактности D^+ следует, что всякое множество действительных чисел мощности τ имеет нулевую лебегову меру. В. И. Чилин [75, 9A252], [76, 7A396] изучает T_1 -топологии на б. а., налагая на них некоторые естественные требования. Такие топологии он называет R -топологиями. Указывается способ распространения R -топологии на пополнение б. а.; показано, что б. а. «не терпит» двух различных R -топологий. Т. А. Сарымсаков, А. Н. Исламов [75, 1A524] строят внешнюю меру на б. а., сходимость по которой почти всюду совпадает с o -сходимостью. Алгебры замыканий изучает Лоуген [77, 2A296]. Куэйкенбуш, Сушко [74, 9A338] исследуют дуальное пространство б. а. с некоторым оператором. Бентем [76, 5A293] доказывает эквивалентность наличия примарных идеалов б. а. ряду фактов, например: произведение бикомпактов — бикомпакт. Ховард [76, 2A137] обсуждает связь между наличием простого идеала б. а. и аксиомой выбора.

Дополнительные структуры на булевых алгебрах и исследования некоторых специальных классов булевых алгебр

Куэйкенбуш [75, 6A423] приводит исчерпывающее решение проблемы Гретцера о почтибулевых алгебрах (1971 г.). Лагранж [75, 5A87] дает решения ряда проблем Сикорского, связанных с бесконечными операциями на булевых алгебрах.

Сифакис [75, 4A78] изучает б. а., атомами которых являются двузначные функции действительной переменной. Манк [76, 1A244] предпринимает безуспешную попытку доказать, что неизоморфные счетные б. а. имеют неизоморфные группы автоморфизмов. Маккензи [77, 12A299] находит условия, при которых изоморфизм групп автоморфизмов б. а. влечет изоморфизм самих булевых алгебр. Дж. Хаджиев [75, 9A199] рассматривает представления групп в булевых алгебрах.

Бурлаку [77, 5A47] изучает конечномерные б. а. (определенные Мойсилом в 59, 7697, который утверждал, что каждая такая алгебра канонически изоморфна подалгебре булевых матриц). Оказалось, что это верно лишь при некоторых дополнительных ограничениях. В работе Берци, Бурлаку [77, 8A343] рассматриваются уравнения типа $x^n = a$ в алгебрах Мойсила. Ранее было установлено, что уравнение $x^2 = a$ может иметь только два решения; оказалось, что уже уравнение

$x^3 = a$ может иметь бесконечно много решений. Абад, Монтейро [77, 12A300] исследуют свободные б. а. с инволюцией. Изучению свойств полных б. а. посвящена работа Монро [75, 9A52]. В. Н. Алексюк [77, 7A288] дает характеристику счетно-полных б. а. с непрерывной внешней мерой (продолжение исследований Магарам).

Олин [77, 7A287] изучает свойства атомности и безатомности б. а. В частности получены некоторые результаты по поводу инвариантов Тарского. Приведем один из основных результатов: вводится понятие счетной ненасыщенности б. а. и показывается, что это свойство сохраняется при взятии свободных произведений. В другой его работе [77, 7A285] показано, что свойство быть аксиоматизируемым классом б. а. сохраняется при расширении этого класса добавлением всевозможных гомоморфных образов (вопрос поставлен Клером [76, 2A218]). Адлер [74, 10A373] доказывает теоремы о представлениях б. а. с замыканием. В другой своей работе [77, 6A228] он изучает свехатомные б. а. (то есть такие, любой гомоморфный образ которых есть атомная б. а.). Для этих алгебр вводятся понятия слабого изоморфизма, вложения, эпиморфизма, которые для счетно порожденных алгебр совпадают с обычными. Даются естественные обобщения результатов Дея [68, 12A237] и Крамера [71, 8A255]. Ханф [77, 3A261] показывает, что результат Мостовского и Тарского о том, что тип счетной б. а. однозначно определяется типом упорядоченного базиса (обязательно существующего в таких б. а.) необратим, что оправдывает долгие бесполезные попытки доказать это утверждение. Ниминен [76, 12A384] определяет полубулеву алгебру в терминах тернарных операций. Ли, Керенцви [76, 2A114] вводят дополнительные операции на б. а. 2^a и высказывают уверенность в их инженерной полезности. А. А. Гольдберг [74, 12A230] изучает б. а. с дополнительной операцией δ , удовлетворяющей условиям $(A \vee B)^\delta = A^\delta \vee B^\delta$; $A^{\delta\delta} \subset A^\delta$; $O^\delta = O$. Фадини [76, 7A368] изучает решетки «комплексных» элементов, то есть пар элементов б. а., проводя при этом аналогию с полем комплексных чисел.

В ряде работ М. Р. Бунятова [75, 7A416; 76, 9A322; 76, 9A329; 74, 6A397] (последняя работа написана совместно с Р. П. Джабраиловой) продолжается изучение введенного им понятия полигонального произведения булевых алгебр. В другой их совместной работе [75, 1A361] вводится понятие тензорного произведения б. а., которое совпадает с известным булевым или свободным произведением. Это же определение

вводит В. И. Чилин [74, 8A286]. В работе [76, 2A593] М. Р. Бунятов исследует обобщение равномерных пространств Вейля для булевых алгебр. Рога Мухаммед Баха Эль-Дин Агами [77, 8A519] продолжает эти исследования. Рютинг [77, 4A308] изучает операции на б. а., которые являются производными основных операций булева кольца. Помимо основного порядка на б. а. B , Хансен [74, 1A290] определяет еще один порядок $\triangleleft$ называемый стабильным, если из $a \triangleleft b$ следует $a + x \triangleleft b + x$ для любого $x \in B$. Общее число стабильных порядков на конечной б. а. 2^n равно 3^n . Изучаются условия, при которых B есть кардинальная сумма изоморфных между собой б. а. B_i , упорядоченных стабильным порядком.

Канкл, Рудяну [74, 9A336] изучают дополнительные структуры кольца, определенные на б. а. в терминах ее основных операций и констант. Приводятся условия, необходимые и достаточные для того, чтобы операции этого кольца были суперпозициями булевых и наоборот: булевы — суперпозициями кольцевых. Получено много следствий. Хирн, Вагнер [74, 11A361] рассматривают булевы субстрактивные алгебры, то есть алгебры с одной бинарной операцией —, удовлетворяющей тождеством $(a - b) - c = (a - c) - b$; $a - (b - a) = a$ и условию: для любых элементов a, b существует такой элемент x , что $x - (a - b) = b$ и $x - (b - a) = a$. Если S булева субстрактивная алгебра, $a \wedge b = a - (a - b)$ и $a \vee b$ есть единственное решение системы уравнений $x - (a - b) = b$, $x - (b - a) = a$, то $\langle S; \wedge, \vee \rangle$ есть обобщенная булева алгебра. Обратно, по любой обобщенной б. а. S строится булева субстрактивная алгебра, ассоциированная с S указанным способом.

Аналогичные вопросы ранее обсуждал Гютинг [72, 5A302]. Пусть $\{B_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ — семейство невырожденных булевых алгебр. Челаковский [74, 6A393] частичной б. а. называет совокупность L пар (A, f) , где A непустое подмножество в Λ и $f \in \prod_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda$; при этом на L налагаются некоторые условия. В работе [74, 10A121] он продолжает эти исследования. Куэнкенбуш, Райхель [76, 2A370, 11A91] (вторая работа принадлежит только второму автору) изучают некоторые специальные виды баз (разбивающие) для булевых решеток и алгебр L . В случае порождения б. а. L как решетки такие базы существуют тогда и только тогда, когда L счетна. М. Г. Рабинович [76, 9A325] дает новое описание введенного им понятия D-алгебр и их конгруенций. Негрепонтис [73, 11A41] строит однородно-универсальную б. а., имеющую

ультрафильтры, обладающие рядом интересных свойств.

Рэндел, Янович, Фоулис [73, 11A288] рассматривают множество X с отношением неравенства. Пусть Γ — свободный моноид над X . Естественно определяемое на X отношение ортогональности лексикографически переносится на Γ . Подмножество $A \subset X$ называется замкнутым, если оно является ортогональным дополнением своего ортогонального дополнения. Естественно определяются замкнутые подмножества в Γ . Упорядоченная включением совокупность $S(\Gamma)$ всех замкнутых подмножеств из Γ является однородной булевой алгеброй. Если аналогичное построение Γ провести для произвольного множества X , наделенного симметричным иррефлексивным бинарным отношением, то мы придем к решетке $S(\Gamma)$, являющейся обобщением булевых алгебр. Работа посвящена изучению свойств решетки $S(\Gamma)$. Пусть ω — первое бесконечное кардинальное число, ω_1 — первое несчетное. Из СН Грегори [74, 12A228] выводит существование ω -дистрибутивной полной б. а., не являющейся ω_1 -представимой. Штреб [77, 12A301] описывает б. а. как универсальные алгебры с одной унарной и одной нулевой операциями. Полученные результаты используются для изучения свойств сопоставления дифференцируемым функциям их рядов Тейлора.

Стоуновская двойственность и близкие к ней вопросы

В. В. Пашенков [75, 2A506] рассматривает топологические модели, то есть индуктивно нульмерные пространства P , в которых для произвольных конечных подмножеств $\{p^i\}_{i=1}^n$, $\{p_j\}_{j=1}^m$ определяются отношения $\leq$ (все эти отношения мы обозначаем одинаково) при всех целых неотрицательных n и m , удовлетворяющих условию $n+m \geq 1$. При этом выполняются аксиомы:

1. Если $p^i = p_j$ для некоторых i и j , то $\{p^i\} \leq \{p_j\}$;
2. Если $\{p^i\} \leq \{p_j\}$ то для любого $p \in P$ $\{p^1, \dots, p^n, p\} \leq \{p_j\}$ и $\{p^i\} \leq \{p_1, \dots, p_m, p\}$;
3. Если для некоторого $p \in P$ имеют место два последних соотношения из п. 2, то $\{p^i\} \leq \{p_j\}$;
4. Если $\{p\} \leq \{q\}$ и $\{q\} \leq \{p\}$, то $p = q$.

Любое подмножество P топологической б. а. B ($\text{ind} B = 0$) можно превратить в модель, определив на P топологию, индуцированную из B , и положив $\{p^i\} \leq \{p_j\}$, если $p^1 \dots p^n p'_1 \dots p'_m = 0_B$. В частности двухэлементная б. а. $D = \{0, 1\}$ таким об-

разом превращается в модель (с дискретной топологией). Каждый непрерывный гомоморфизм $P \rightarrow D$ назовем характером модели P и множество всех ее характеров обозначим через $\chi(P)$ (заметим попутно, что характеры дискретных б. а. изучает Фогель: 74, 9A333). На $\chi(P)$ естественным образом (поточечным) определяется топология и отношения, что превращает $\chi(P)$ в модель, называемую моделью характеров модели P . Оказывается, что для любой модели ее первая и третья модели характеров топологически и алгебраически изоморфны. Любое частично упорядоченное множество можно рассматривать как «недостроенную» модель, в которой определено лишь бинарное отношение: $n=m=1$. Каждое «достроение» этого множества до модели можно произвести многими способами и каждый такой способ обеспечивает вложение этого множества в некоторую булеву алгебру. На этом пути можно получить ответ, возможно ли с сохранением данных алгебраических свойств получить вложение упорядоченного множества в б. а. Эти исследования продолжаются в работах [75, 9A254] и Lattice theory (Coll. math. soc. János Bolyai, Szeged, 14, 271—300). Основные результаты о вложениях в б. а. упорядоченных множеств, полурешеток, решеток получаются из упомянутых результатов как простые следствия. С помощью этих результатов получены топологическое решение проблемы существования жесткой полной б. а. (это решение использует результаты А. И. Райхберга) и распространение теоремы Колмогорова-Гельфанда (о представлении бикомпакта кольцом непрерывных на нем функций) на случай любого вполне регулярного пространства [75, 12A313]. Двойственность Стоуна является хотя и существенным, но весьма частным проявлением описанной общей закономерности.

Хайда [74, 12A227] строит алгоритм, позволяющий установить, можно ли и сколькими способами продолжить отображение части одной б. а. в другую до гомоморфизма. В работе [74, 5A324] через M_K он обозначает б. а. всех векторов $a = (a_1, \dots, a_K)$; $a_i = 0, 1$. Строится отображение M_P в M_K и соответствующая ему булева матрица. Изучаются свойства этих отображений. Это позволяет вычислить число гомоморфных отображений (в частности, эндоморфизмов), сохраняющих ноль, для конечных булевых алгебр. Мюллер [76, 4A281] изучает пары (A, F) , где A — множество, F — некоторая совокупность отображений A в двухэлементную б. а.

Кеймел, Вернер [76, 12A411] рассматривают аксиоматически определяемый класс универсальных алгебр (в него вхо-

дят, например, конечные тела, бэровские кольца, алгебры Поста). Для каждой алгебры этого класса строится некоторое представление. В качестве следствий получены результаты Аренса-Капланского для колец и тел и теорема Стоуна для булевых алгебр. Бенкстон [76, 12A569] называет гиперпространством $H(X)$ пространства X пространство непустых замкнутых подмножеств с топологией Вьеториса. На основе двойственности Стоуна изучается оператор перехода к гиперпространству. Мачиньский [73, 11A291] изучает множество функций A из непустого множества A в отрезок $[0, 1]$, упорядоченное поточечным образом. Назовем A числовой б. а., если 1) A — б. а.; 2) $a' = 1_A - a$; 3) из $a \wedge b = 0_A$ следует $a \vee b = a + b$. Найдены необходимые и достаточные условия для того, чтобы A была числовой булевой алгеброй. Н. Р. Алиева [74, 3A238] строит функторы из категории б. а. в категории колец и топологических групп. В ее работе [74, 3A237] изучаются линейные представления групп автоморфизмов булевых алгебр.

Другие вопросы

Коппельберг [76, 3A325] изучает гомоморфные образы σ -полных булевых алгебр. С. В. Кисляков [73, 9A294; 75, 10A319] находит условия, при которых полная б. а. содержит свободную подалгебру той же мощности. Йех [76, 5A292] рассматривает полные б. а., у которых любая полная подалгебра безатомна, называя эти алгебры простыми. В другой его работе [77, 3A254] из СН выводится существование счетно порожденной полной б. а. мощности $\aleph_{\omega+2}$. Абян [73, 12A75] показывает, что для любого ординала ν существуют неизоморфные б. а. мощности $\sup_{u < \nu} 2^u$. Отсюда и из СН вытекает: для

любого ν существуют неизоморфные безатомные б. а. мощности $\aleph_{\nu+1}$. Вихс [76, 8A395; 77, 8A51] показывает, что для любой бесконечной мощности α ($\alpha \leq \aleph_1$) существуют 2^α неизоморфных атомных (суператомных) б. а. мощности α . Белл [76, 6A42; 12A42] для б. а. мощности, не превышающей k , определяет k -полноту, k -универсальность и находит условия, равносильные k -универсальности.

Соколовский [76, 9A328] изучает (m, n) -произведения б. а. в смысле Сикорского и решает его проблему [64, 6A260]. Рид [75, 9A253] указывает условия, при которых в упорядоченном множестве всех (I, M, m) -расширений данной б. а. имеется наименьший элемент. Пирс [74, 6A597] показывает, что счет-

ная б. а. имеет упорядоченную базу, являющуюся лексикографической суммой вполне упорядоченных множеств по упорядоченному множеству рациональных чисел. Лапинская [77, 12A295] изучает амальгамы б. а.

Б. а. отношений на конечном множестве рассматривают Беднарек, Улам [77, 4A309]. Установлено, что такие алгебры порождаются двумя элементами с помощью булевых операций и операции произведения отношений. Полугруппу бинарных отношений на конечном множестве изучает Либихер [74, 12A229]. Хайда [75, 6A417] приводит условия, при которых всякое отношение толерантности на б. а. есть конгруенция. Некоторые результаты о конгруенциях на б. а. B получает Вареча [75, 12A294], привлекая к рассмотрению группу автоморфизмов б. а. B и решетку ее подалгебр.

Шафаат [76, 3A273] называет группоид $(A, \cdot)$ булевым, если $A \subset B$ для некоторой б. а. B и $a \cdot b = a \vee b'$. Оказывается, что булевы группоиды образуют конечно базлируемое многообразие. Адамек, Коубек, Трнкова [76, 11A224] каждой абелевой группе $(S, +)$ сопоставляют набор булевых пространств X_s , $s \in S$, причем при $s + t = u$ пространство X_u гомеоморфно сумме пространств X_s , X_t . Это позволяет каждую группу представить в категориях колец, б. а., решеток, банаховых пространств и банаховых алгебр. Близким вопросам посвящены работы Х. Олимова [76, 3A260; 7A369]. Брекин, Аллен [74, 8A285] с каждой б. а. $(R, +, \cdot, ')$ связывают полукольцо $(R, +, \cdot, 0, 1)$ и доказывают аналог теоремы Гильберта: если R — полукольцо с условием обрыва возрастающих цепей идеалов, то полукольцо $R[x]$ многочленов над R частично наследует это свойство. Простые идеалы кольца Витта поля описывают Канзаки, Китакура [73, 8A294], привлекая упорядочивания полей.

Обзор результатов о функциях Шеффера делает Белак [77, 11A97]. Стефани [77, 1A286] изучает некоторый тип отображений б. а. (полуморфизмов). Грачиньская [76, 3A338] довольно сложно определяет разложимость алгебр и показывает, что б. а. неразложима. Отметим ряд работ, посвященных булевым уравнениям. С помощью соотношения $x_n = a_1 x_{n-1} + \dots + a_r x_{n-r}$ на булевом кольце Клеве [74, 10A295] задает рекуррентную последовательность $\{x_n\}$; $n \geq -r$ с начальными условиями $(x_{-r}, \dots, x_{-1})$. При начальных условиях $(0, \dots, 0, 1)$ указана формула, позволяющая вычислять величину наименьшего периода соответствующей последовательности при $r \leq 6$. Клеве предположил, что эта же формула остается верной при всех r . Мюккелтвейт, Селмер [74, 10A296] устанавливают

справедливость этого предположения. Берци [74, 7A419] приводит алгоритм решения булевых уравнений, коэффициентами и неизвестными в которых являются множества. Булевым уравнениям посвящена работа Левит [77, 8A342]. Булевы функции изучает Рудяну [76, 11A374]. В заключение укажем некоторые работы, не содержащие новых результатов: Кириин [76, 12A387], Шмид [75, 2A135], Абян [74, 9A334], Касахара [77, 1A287].

Л. Л. ЭСАКИА

АЛГЕБРЫ ЛОГИКИ

Монография Расёвой [75, 6A125] полностью посвящена алгебраическому исследованию неклассических логик. Наряду с логическими системами, представленными в книге Расёвой и Сикорского *¹, рассматриваются позитивная логика с полумножением, интуиционистская логика с сильным отрицанием, различные многозначные логики. Исходным понятием служит понятие импликативной алгебры. Двухтомная монография Шеника [77, 2A65] содержит стандартный материал, относящийся к классической (I том) и неклассическим (II том) логикам и их связи с алгебраическими системами; форма изложения учитывает общую ориентированность монографии на специалистов по вычислительной технике и кибернетике. Работа Андрека, Немети и Гергея [74, 7A135] содержит подробное алгебраическое построение логики предикатов I порядка. Работы по логическим основам квантовой механики, написанные за последние 40 лет, включены в сборник [76, 5A67]. С. Н. Гоншорек и П. П. Чунин предлагают [76, 8A156] исторический обзор результатов развития алгебраического аппарата квантовой механики. Обзор состояния дел в изучении квантовой логики включен и в диссертацию Крёгера [74, 1A293], посвященную ортомодулярным решеткам. Резюме [76, 1A105] обзора Двингера дает представление о недавних результатах теории алгебр Поста. Изучению матриц над булевыми и постоянными алгебрами посвящена диссертация Серфата [75, 10A321]. Следуя некоторой общей идее А. И. Мальцева, Кёлер в диссертации [76, 4A298] исследует полугруппу многообразий алгебр Брауэра.

*¹ Расева Х., Сикорский Р. Математика метаматематики. М., 1972.

Диссертация Жури [76, 2A408] посвящена проблеме представления полиадических алгебр конечной степени. В I (обзорной) части работы Хенкина и Манка [75, 10A89] рассматриваются алгебры отношений, проективные алгебры Эверета и Улама, цилиндрические алгебры и проблема их представления. Подробному доказательству представимости подпрямого произведения бесконечномерных представимых цилиндрических алгебр с бесконечными базисами посвящена II часть; в III части формулируются открытые проблемы.

§ 1. Цилиндрические и полиадические алгебры. Булевы алгебры с дополнительными операциями

Для любого ординала α , цилиндрическая алгебра размерности α , короче CA_α есть алгебра $A = (A, +, \cdot, -, 0, 1, C_k, d_{k\lambda})_{k, \lambda < \alpha}$, где $(A, +, \cdot, -, 0, 1)$ — булева алгебра, C_k — одноместная операция (интерпретируемая как квантор существования по переменной v_k), $d_{k\lambda} \in A$ — выделенные элементы (соответствующие формулам $v_k = v_\lambda$), удовлетворяющие условиям: $C_k 0 = 0$; $x \leq C_k x$; $C_k(x \cdot C_k y) = C_k x \cdot C_k y$; $C_k C_\lambda x = C_\lambda C_k x$; $d_{kk} = 1$; $d_{\lambda k} = C_k(d_{\lambda k} d_{k\mu})$ если $k \neq \lambda, \mu$; $C_k(d_{k\lambda} \cdot x) \cdot C_k \times \times (d_{k\lambda} \cdot - x) = 0$, если $k \neq \lambda$. Если для любого $x \in A$ множество (переменных, входящих свободно в формулу x) $\{k < \alpha : C_k x \neq x\}$ конечно, то CA_α — называется локально конечной. Мьерс в [76, 11A86] доказывает, что категория ω -мерных цилиндрических алгебр и их гомоморфизмов двойственна категории, объектами которой являются модели некоторой теории, а морфизмами — функторы, коммутирующие с операциями ультрапроизведения. На основе теории двойственности устанавливается, какие свойства языков логики предикатов являются инвариантами по отношению к изоморфизму цилиндрических алгебр. Для счетных языков с равенством полное множество инвариантов состоит из а) числа предикатных и функциональных символов с не менее чем n аргументами, в) существенных констант, с) числа предикатных символов. Таким образом, решена проблема классификации свободных ω -мерных локально конечных цилиндрических алгебр.

Используя аппарат цилиндрических алгебр, Пинтер [77, 1A55] получает ряд интересных результатов об алгебрах Линдембаума F_T счетных теорий T . Лаита [77, 1A41] строит категориальную модель (φ -категорию) для исчисления высказываний и для полиадических и цилиндрических алгебр. Андрека и Нёмети [76, 3A64] приводят простое, чисто алгебраическое до-

казательство семантической полноты логики предикатов I порядка. Кванторной алгеброй Пинтер [74, 2A76] называет алгебру $(A, +, \cdot, -, 0, 1, S_k^\lambda, \exists_k)$, где $k, \lambda \leq \alpha$, $(A, +, \cdot, -, 0, 1)$ — булева алгебра, $\exists_k$ (квантор) и S_k^λ (подстановка v_λ вместо свободных вхождений v_k) — одноместные операции, такие, что для любых $k, \lambda, \mu \leq \alpha$ и $x, y \in A$ имеет место:

$$S_k^\lambda(-x) = -S_k^\lambda(x); \quad S_k^\lambda(x + y) = S_k^\lambda(x) + S_k^\lambda(y); \quad S_k^k = id;$$

$$S_k^\lambda S_k^\mu = S_k^\lambda S_k^\mu; \quad \exists_k(x + y) = \exists_k x + \exists_k y; \quad x \leq \exists_k x; \quad S_k^\lambda \exists_k = \exists_k;$$

$$\exists_k S_k^\lambda = S_k^\lambda \quad \text{при } k \neq \lambda; \quad S_k^\lambda \exists_\mu = \exists_\mu S_k^\lambda \quad \text{при } \mu \neq k\lambda.$$

Кванторная алгебра локально конечна, если для любого $x \in A$ множество $\{k: \exists_k x \neq x\}$ конечно. Локально конечные кванторные алгебры изоморфны полиадическим алгебрам. Добавление выделенных элементов $e_{k\lambda}$ с аксиомами $S_k^\lambda e_{k\lambda} = 1, x \cdot e_{k\lambda} \leq S_k^\lambda x$ дает кванторные алгебры с равенством, изоморфные цилиндрическим алгебрам. В [74, 2A311] Пинтер предлагает упрощенную аксиоматику полиадических алгебр, а в работе [74, 7A129) вводит алгебраическое понятие терма, мотивированное алгеброй формул логики предикатов. Алгебра подстановок подробно изучается в работе [73, 12A323].

Собоциньский [74, 5A102] вводит альтернативное определение кванторных алгебр Пинтера, а Петреску [74, 8A81] доказывает равнообъемность понятия полиадической алгебры и кванторной алгебры; в работах [73, 9A112; 74, 2A72] исследуется аксиоматика цилиндрических, монадических и проективных алгебр. Жури [74, 3A52] устанавливает, что категория полиадических алгебр с равенством (конечной степени и характеристики 0) эквивалентна категории инъективных релятивизаций таких алгебр. Селви [73, 12A86] показывает, что каждая специальная (в смысле Тарского и Хенкина) цилиндрическая алгебра изоморфна некоторой специальной релятивизированной цилиндрической алгебре множеств и что всякую специальную цилиндрическую алгебру множеств можно естественным образом преобразовать в двухместную функциональную полиадическую алгебру и обратно. Работа Тушика [73, 11A78] также посвящена представимости цилиндрических алгебр. В интересной статье [75, 7A446] Хенкина и Ресека обнаружено, что класс всех цилиндрических релятивизированных алгебр размерности 2 образует конечно базлируемое многообразие, однако, начиная с размерности 3, эивациональная характеристика невозможна.

Комер вводит понятие многозначной лупы [77, 3A217] как

системы $(A; e, \cdot)$, где $e \in A$ и $a \cdot b$ — непустое множество при любых $a, b \in A$, причем для всех $a, b \in A$ существуют единственные $x, y \in A$ такие, что $b \in a \cdot x$, $b \in y \cdot a$. Указано интересное применение многозначных луп к теории цилиндрических алгебр. Монадической алгеброй называется булева алгебра B , снабженная дополнительной операцией C (квантором), удовлетворяющей условиям: $C0=0$, $a \leq Ca$, $C(a \cdot Cb) = Ca \cdot Cb$ для любых $a, b \in B$. Используя технику теории пучков универсальных алгебр, базой которых служит пространство Стоуна, Комер [76, 11A392] получает следующее представление монадических алгебр: для любой счетной монадической алгебры A конечной степени существует пространство Стоуна X и простая монадическая алгебра B , такие, что A изоморфна алгебре непрерывных функций из X в B . Используя такое представление, Комер показывает разрешимость теории любого собственного многообразия монадических алгебр, оставляя, однако, открытым вопрос разрешимости класса всех монадических алгебр.

Исходя из интуиционистской логики предикатов Монтейро и Варшавский [75, 7A96] определяют монадические алгебры Хейтинга как алгебры $(H, \wedge, \vee, \rightarrow, 0, \exists, \forall)$, где $(H, \wedge, \vee, \rightarrow, 0)$ — алгебра Хейтинга, $\exists, \forall$ — одноместные операции (кванторы существования и общности), удовлетворяющие некоторой системе тождеств. Монадические алгебры Хейтинга совпадают с монадическими алгебрами Халмоша, когда $(H, \vee, \wedge, \rightarrow, 0)$ — булева алгебра. В статье обсуждаются трудности, связанные с проблемой представимости указанных алгебр функциональными алгебрами. В [75, 12A306] Монтейро изучает монадические, а Георгеску [77, 11A104] полиадические алгебры Лукасевича. Решетка многообразий монадических алгебр Поста изучается в работе Марчьи [74, 58A89].

В статьях [76, 11A115; 9A120] Магари исследует введенные им диагонализированные алгебры, то есть булевы алгебры с дополнительной одноместной операцией τ , обладающей свойствами «штопора» $\vdash$ (знак доказуемости); показывает возможности применения алгебр этого типа для анализа некоторых метаматематических теорем. Пусть T — множество теорем арифметики Пеано. Как известно, существует такая формула $T(x)$ с одной свободной переменной, что если p — предложение арифметики, $\ulcorner p \urcorner$ — ее гёделевский номер, то $T(\ulcorner p \urcorner) \in T \iff p \in T$. Из этого факта и леммы о диагонализации выводятся обе теоремы Гёделя и другие важные результаты. Алге-

бра Линденбаума для арифметики Пеано и есть диагонализированные алгебры. Бернарди [76, 6A102] доказывает аналог диагонализационной леммы в этих алгебрах. Буль [77, 10A37] изучает муровское замыкание на булевых алгебрах.

§ 2. Квантовая логика

Интерес к теории решеток, ориентированной на квантовомеханические приложения, за последнее время продолжает расти. Гричи и Гадер [76, 5A63] подробно обсуждают два основных направления в проблеме обоснования квантовой механики и построения удовлетворительной логики квантовой механики, начиная с классической работы Биркгофа и фон Неймана [76, 6A90]. Авторами рассматривается важная проблема приемлемого определения импликации в квантовой логике и отмечается неудовлетворительность предлагавшихся до сих пор определений. В работе содержится также обсуждение проблемы скрытых параметров и сформулированы основные задачи, стоящие перед квантовой логикой. Пизяк [75, 5A89] аксиоматически определяет квантовую импликативную алгебру как алгебру $(A, \supset, 0)$ с одной бинарной операцией и выделенным элементом. В работе показано, что упорядоченное множество $(A, \leq)$, где $x \leq y \Leftrightarrow (x \supset y) = (0 \supset 0)$ является ортомодулярной решеткой, причем $x \wedge y = x \supset (x \supset y)'$, $x \vee y = x' \supset (x' \supset y)'$ и $x' = x \supset 0$, а импликация однозначно восстанавливается через решеточные операции следующим образом: $x \supset y = x' \vee (x \wedge y)$. Интерес Келмбах в статье [75, 10A87] также сконцентрирован на проблеме импликации в квантовой логике (ортотомодулярной решетке); из рассмотренных шести типов импликаций, автор останавливается на одной из них как на наиболее разумной с логической точки зрения, несмотря на то, что в соответствующей квантовой логике теорема дедукции оказывается ложной. В работе Германа, Марсдена и Пизяка [76, 6A97] вводится целый ряд связок типа импликации и исследуются их как нормальные, так и патологические (с точки зрения квантовой логики) свойства. Указана возможность введения модальных операторов $\Box$, $\Diamond$ в квантовую логику. Изучению связки типа импликации посвящена и работа Хардегри [76, 6A99]. Кларк [74, 7A134] строит исчисление с импликацией $\rightarrow$ и отрицанием $\neg$, доказуемость в котором равносильна истинности в любой ортомодулярной решетке, если положить $a \rightarrow b$ равным $a' \vee (a \wedge b)$, $\neg a$ равным a' .

Мачиньский предлагает [77, 10A44] несколько более узкое, чем обычное, определение квантовой логики, изучает свойст-

ва таких логик и приводит условия, достаточные для того, чтобы они были изоморфны стандартной квантовой логике. Исходя из идеи, что физические величины квантовой теории являются классами эквивалентности физических величин классической теории, Финч [76, 6A95] предлагает не сходное с обычным построение квантовой логики. Решеточные свойства квантовой логики, специальные расширения до полных атомных орторешеток исследуются в работе Бугайских [75, 3A51]. Шерер [74, 7A92] приводит аргументы, показывающие связь двузначной (многозначной) логики с физическими свойствами фермионов (бозонов). Исследование, проведенное в работе Цеглы и Ядчика [77, 6A188], ориентировано на проблематику нерелятивистской квантовой механики и вопросы причинности в системе событий физики Галилея—Ньютона; центральным понятием является понятие каузальной решетки, родственное пространствам ортогональности Гричи. В работе [75, 3A51] определяется класс полных атомных неприводимых полумодулярных ортомодулярных решеток, которые не представимы как линейные подпространства векторного пространства над каким-нибудь телом, и на их основе строится квантовая логика.

Отметим теперь работы, связанные с подходом к квантовой логике Кочена и Шпеккера. Кочен и Шпеккер [76, 6A93] исследуют обобщение классического пропозиционального исчисления, основанное на введении частичных пропозициональных функций. Центральным понятием работы является понятие частичной булевой алгебры $(B; \circ, \vee, \wedge, -, 1, 0)$, где $(B; \vee, \wedge, -, 1, 0)$ — булева алгебра, $\circ$ — бинарное отношение «соизмеримости». Челяковский [74, 6A392] добавляет к исчислению Кочена-Шпеккера PP_1 новое правило RG и доказывает, что в расширенном исчислении доказуемость формулы равносильна ее общезначимости во всех частичных транзитивных булевых алгебрах. В работе [74, 6A393] упрощается аксиоматическое определение частичных булевых алгебр, а в [74, 6A394] Челяковский распространяет теорему представления Стоуна на частичные булевы алгебры. Конечная порождаемость и прямые произведения частичных булевых алгебр исследуются им в работах [74, 6A395; 76, 2A101]. В качестве базисной алгебры состояний Страусс [73, 10A69] также использует частичные булевы алгебры. Сабальский [74, 6A396] доказывает, что булева алгебра B , снабженная компактной Хаусдорфовой топологией (с условием непрерывности булевых операций), полна.

§ 3. Алгебры Поста и их обобщения

Новое эквивалентное определение постовых алгебр конечного порядка дано Эпштейном в статье [74, 1A291]. В [75, 1A165] Наттер, Свортвут и Райн алгебры Поста рассматривают в связи с k -значными переключательными схемами. Дрabb [73, 7A116] дает доказательство вложимости любой k -значной алгебры Поста в прямую степень k -элементной (линейной) алгебры Поста. Алгебры Поста изучаются также в работе Пешеля [76, 4A283]. В статьях И. А. Мальцева [73, 8A67; 8A270; 77, 10A200] исследуются конгруенции, подалгебры и автоморфизмы на итеративных алгебрах Поста, особенно на клетках алгебр Поста и клеточных подалгебрах. В. Н. Колпаков [75, 2A365] устанавливает необходимые и достаточные условия максимальности подалгебр монотонных функций в клетках алгебр Поста конечного порядка; Серфати [73, 7A311] указывает необходимые и достаточные условия принадлежности элемента алгебры Поста заданной конечнопорожденной подалгебре. Дана характеристика свободных конечнопорожденных алгебр Поста. Райн [74, 12A74] доказывает, что k -значные алгебры Поста порождают ассоциативную операцию симметрической разности, если и только если k — четное число. Пусть A — ограниченная дистрибутивная решетка, а B — булева подалгебра центра решетки A . Конечное множество $\{e_0, \dots, e_{n-1}\} \leq A$ называется цепным базисом решетки A , если $0 \leq e_0 \leq \dots \leq e_{n-1} = 1$ и множество $B \cup \{e_0, \dots, e_{n-1}\}$ порождает решетку A . Если решетка A обладает цепным базисом, то она называется P_0 -решеткой. P_0 -решетка $(A, e_0, \dots, e_{n-1})$ называется P_1 -решеткой, если $e_{i+1} \rightarrow e_i = e_i$. Алгебры Поста, являющиеся одновременно P_0 - и P_1 -решетками, называются P_2 -решетками. Эпштейн и Хорн [75, 9A225] изучают свойства указанных решеток и их связь с решетками Стоуна и алгебрами Хейтинга. Трачик [76, 2A111] подробно доказывает две леммы, опираясь на которые можно получить изящную характеристику постовых алгебр конечного порядка, предложенную в вышеуказанной работе Эпштейна и Хорна. Салони [76, 12A380] строит пример P_1 -решетки, которая не является P_2 -решеткой и пример P_0 -решетки, не являющейся P_1 -решеткой.

Чиньоли [75, 9A250] находит конструкцию категорий, дуальных категориям k -значных алгебр Поста и Лукасевича, используя пространство простых фильтров. Вопросы строения и представления вполне разложимых решеток, включая обобщенные алгебры Поста, рассматриваются М. Г. Рабиновичем

[74, 3A231]. Л. Л. Максимова и Д. Вакарелов [74, 6A87] доказывают вложимость (с сохранением заданных семейств бесконечных объединений и пересечений) обобщенных алгебр Поста порядка ω^+ в постову алгебру множеств. Расёва [76, 8A134] обзорекает результаты, относящиеся к обобщенным алгебрам Поста порядка ω^+ и ω^+ -значным исчислениям предикатов. Алгебры, связанные с многозначными логиками, рассмотрены также в статье Маньяни [74, 5A109]. Обобщенным алгебрам Поста посвящена и работа Нгуен Кат-Хо [74, 4A72].

Псевдопостова алгебра (порядка k) определяется как свободное произведение псевдобулевой алгебры и k -элементной цепи в категории ограниченных дистрибутивных решеток. Бизер [72, 11A356] показывает, что решетка конгруенций $\theta(P)$ псевдопостовой алгебры P является булевой, если и только если P является конечной алгеброй Поста. Доказано также, что пополнение Мак-Нейла псевдопостовой алгебры также является псевдопостовой алгеброй. В [76, 12A105] Бизер характеризует алгебры вида $P_n \times P_m$ в терминах L -алгебр, решеток Стоуна и выделенных цепей элементов. Определив почтипостову алгебру порядка k как прямое произведение булевой алгебры и алгебры Поста порядка k , Бизер [76, 2A382] показывает, что каждая эквивалентно компактная почтипостова алгебра является ретрактом компактной топологической алгебры. Этим свойством обладает и ряд других обобщений алгебр Поста ($P^{|L|}$ -алгебры, P_0 -решетки, алгебры Лукасевича), как показано в работе Бизера [76, 6A319]. Лапшер [75, 12A62] предлагает способ внесения в алгебры Поста структуры кольца или модуля над Z/p . Дан [76, 6A86] рассматривает k -значное обобщение теории моделей на основе алгебр Поста. Войткевич [74, 7A141] устанавливает конечную аксиоматизируемость конечных N -алгебр, то есть алгебраических моделей конструктивной логики с сильным отрицанием Нельсона.

§ 4. Специальные подклассы дистрибутивных решеток

Дистрибутивные решетки со счетным цепным базисом и их связь с алгебрами Стоуна и Хейтинга рассматриваются Трачиком и Зарембским в работе [76, 11A369]. Брезулеану [74, 7A416] получает ряд интересных результатов для категорий алгебр Лукасевича, Поста и некоторых других категорий дистрибутивных решеток, связанных с логикой; рассматриваются также двойственные им категории. Центральным понятием интересной работы Эпштейна и Хорна [77, 6A70] является

понятие субрезидуальной решетки (далее СРР), позволяющее, по мнению авторов, не только дать естественную классификацию известных неклассических исчислений, но и определить ряд новых исчислений, имеющих как алгебраический, так и философский интерес. СРР есть пара (A, Q) , где A — дистрибутивная решетка с 0 и 1, Q — подрешетка A , содержащая 0 и 1 и удовлетворяющая условию: для любых $a, b \in A$ существует элемент $x \in Q$, такой, что $(\forall q \in Q)(a \wedge q \leq b \iff q \leq x)$. А. Таутс в работах [73, 11A87; 11A287] показывает, что класс псевдобулевых алгебр, полученных из обобщенных моделей Бета, уже, чем класс псевдобулевых алгебр, ассоциируемых с топологическими пространствами. В [75, 3A118] определяется дедуктивная система с бесконечными формулами и доказывается полнота относительно псевдобулевых алгебр. Сато [74, 8A79] определяет операцию сшивания двух псевдобулевых алгебр и доказывает, что любая конечная псевдобулева алгебра может быть получена из изоморфных копий двухэлементной булевой алгебры с помощью операций сшивания и прямого произведения.

Куэйкенбуш [75, 6A423] называет алгебру $(A, \vee, \wedge, ', 0, 1)$ почтибулевой, если каждая подалгебра, порожденная любыми двумя элементами, является булевой. Дается решение проблемы Гретцера: для всякого $k \geq 16$ такого, что $k \equiv 4 \pmod{12}$ или $k \equiv 8 \pmod{12}$ существует почтибулева (не булева) алгебра порядка k . В работе Раушер [74, 9A82] определяется пропозициональное H - B -исчисление (симметричное интуиционистское исчисление) и доказывается полнота относительно класса дважды-брауэровых алгебр. Бизер [74, 9A322] дает характеристику полных дважды-брауэровых алгебр в терминах разрешимости полиномиальных уравнений. Итуриоз [76, 12A104] доказывает, что дважды-брауэрова алгебра $(A, \vee, \wedge, \rightarrow, \div, 1, 0)$ является алгеброй Лукасевича, если и только если для любых $a, b \in A$ имеет место $(a \rightarrow b) \vee (b \rightarrow \neg \neg a) = 1$, где $\neg a = a \rightarrow 0$ и $\neg \neg a = 1 \div a$. В [75, 7A104] описывается семантика трехзначного симметричного интуиционистского исчисления в терминах дважды-брауэровых алгебр с инволюцией. Обзор исследований по дважды-брауэровым алгебрам содержится в работе [76, 11A90], в статье [77, 5A46] Итуриоз доказывает, что любая дважды-брауэрова алгебра, удовлетворяющая условию Стоуна $\neg a \vee \neg \neg a = 1$, полупроста. Катриняк [75, 4A353] дает метод построения регулярных дважды p -алгебр.

Мурти [75, 7A441] вводит понятие полубрауэровой алгебры, то есть полурешетки с 0 и с бинарной операцией —, обладаю-

щей свойством $a - b \leq c \iff a \leq b \vee c$. Показано, что симметричная разность $a * b = (a - b) \vee (b - a)$ удовлетворяет аксиомам расстояния. Раушер и Сабальский [76, 1A332] доказывают, что всякая псевдобулева алгебра, удовлетворяющая бесконечному дистрибутивному закону

$$a \vee \bigwedge_t b_t = \bigwedge_t (b_t \vee a),$$

вложима в псевдобулеву алгебру всех возрастающих множеств подходящего упорядоченного множества. Кабзинский и Вронский [76, 3A66] изучают алгебру формул интуиционистской логики, содержащих только связку эквивалентности. Сурма [74, 6A128] использует алгебру Лукасевича для получения генценовской формулировки логики Лукасевича. Монтейро [75, 8A115] дает описание свободной алгебры Моргана. В [77, 11A103] Кливом предложено своеобразное применение алгебр Моргана к анализу эмпирической непрерывности, реализующее идею Аристотеля о соприкосновении тел краями или границами.

Дистрибутивные решетки с эндоморфизмами исследуются в работе Н. М. Ермолаевой и А. А. Мучника [76, 11A104]; доказывается теорема представления стоуновского типа. В дистрибутивной решетке L Лапшер [74, 12A224] определяет тернарную операцию $M(x, y, z) = (x \wedge y) \vee (y \wedge z) \vee (z \wedge x)$; при фиксировании элемента $a \in L$ получается бинарная операция $M_a(x, y) = M(x, y, a)$. Указаны некоторые свойства этих операций и с их помощью обобщаются законы де Моргана в алгебрах Поста. Р. Ш. Григолия [76, 3A75] доказывает теорему представления для MV_k -алгебр (алгебр, соответствующих k -значной логике Лукасевича-Тарского) с помощью подпрямых произведений цепей. Описана также решетка всех многообразий MV_k -алгебр, порождаемых своими конечными алгебрами. Сухонь [77, 9A375] сравнивает два определения алгебр Лукасевича и доказывает их неэквивалентность; в [77, 9A112] он описывает способ построения $(n \times m)$ -значной алгебры Лукасевича, исходя из n - и m -значных. Упрощение ряда характеристик алгебр Нельсона, предложенных Монтейро, содержится в работе Бриньо [75, 12A305].

Хирн и Вагнер [74, 11A361] изучают булевы субстрактивные алгебры, то есть алгебры $(S, -)$ с одной бинарной операцией, — удовлетворяющей тождествам $(a - b) - c = (a - c) - b$, $a - (b - a) = a$ и условию $(\forall a, b \exists x)(x - (a - b) = b \text{ и } x - (b - a) = a)$. Если S — обобщенная булева алгебра, $a, b \in S$ и $a - b$ обозначает единственное решение уравнений $x \vee a =$

$a \vee b$ и $a \wedge b = 0$, то $(S, -)$ — булева субстрактивная алгебра. Обратно: если $(S, -)$ — булева субстрактивная алгебра, $a \wedge b = a - (a - b)$ и $a \vee b$ есть единственное решение $x - (a - b) = b$ и $x - (b - a) = a$, то $(S, \wedge, \vee)$ — обобщенная булева алгебра. Вронский и Зигмунт [75, 2A115] восстанавливают приоритет Ригера в полном описании свободной циклической псевдобулевой алгебры (так называемой лестницы Нишимуры).

И. В. Витенько и В. В. Николенко [74, 11A362] определили критерий того, что для любой конечной p -алгебры L можно найти такие натуральные n, m , что $L \in E_n^*$ и $L \notin E_m^*$. Л. Л. Максимова [74, 6A135] предлагает алгебраическую интерпретацию ряда неклассических исчислений; определяется специальный класс дистрибутивных решеток с бинарной операцией типа импликации и доказывается теорема представления, обобщающая теорему Стоуна о представлении дистрибутивных решеток. В работе [75, 7A99] изучаются эквациональные классы алгебр типа $(A, \vee, \wedge, N)$, где A — линейно упорядоченное множество, $x \wedge y = \min(x, y)$, $x \vee y = \max(x, y)$, а унарная операция N удовлетворяет условиям $x \leq y \Rightarrow N_y \leq N_x$, $N_x^k \leq N_y^k$ для некоторого натурального k , где $N_x^k = N^{k-1}(N_x)$.

§ 5. Функциональная полнота и другие вопросы

Б. А. Ромов [76, 8A136] рассматривает проблемы функциональной полноты и функциональной выразимости в подалгебрах $P_1 \times \dots \times P_n$ полной алгебры Поста порядка k . Дюкас [76, 3A82], используя конгруенции на алгебрах Поста порядка k , выясняет, какие функции Поста являются k -сводимыми ($k \geq 2$), и дает оценку числа таких функций. Токаш [75, 11A109] находит необходимые и достаточные условия выразимости функций в алгебрах Сугихары в терминах импликации, а в работе [74, 9A80] описано множество бинарных функций, определяемых через импликацию в гёделевых алгебрах G_n . Романовская [75, 6A421] средствами булевых алгебр с двумя дополнительными операциями изучает некоторые разделы теории музыки. Работа Клея [75, 9A88] относится к мереологии Лесневского. М. П. Упчер и В. П. Федоров предлагают [76, 6A80] математический аппарат для описания структуры релейных устройств со специальными задержками.

Алгеброй форсинга Георгеску [76, 10A77] называет тройку (P, A, F) , где P — упорядоченное множество, A — полная дистрибутивная решетка с 0 и операцией отрицания $\neg$, облада-

ющей свойством $x \wedge \perp x = 0$, а отношение $P \models x$ ($p \in P, x \in A$) удовлетворяет аксиомам для отношения вынуждения; некоторые результаты теории форсинга получают, таким образом, алгебраическую формулировку. В. В. Калинин [76, 6A315] строит теорию размерности на специальных упорядоченных множествах с ортодополнениями. Аш [75, 9A268] изучает связь между двумя известными конструкциями: редуцированной степенью и булевым расширением универсальной алгебры. В интересной работе [76, 3A84] Бачич классифицирует 216 интерполяционных принципов для формул эквациональных теорий; анализируется связь с сепарационными принципами и свойством амальгамируемости. В первой части работы [73, 8A73] Пахольского дается полное описание ω_1 -универсальных фильтров в терминах элементарной характеристики Ю. Л. Ершова. Во второй части содержится ряд интересных результатов, из которых, в частности, вытекает характеристика фильтров, сохраняющих компактность.

Т. С. ФОФАНОВА

ОБЩАЯ ТЕОРИЯ РЕШЕТОК

Данный обзор является непосредственным продолжением одноименной статьи, опубликованной в третьем выпуске этого сборника [76, 10A200]. Поэтому в основном сохраняются порядок и стиль изложения материала, а именно: работы структурно-геометрического направления, независимо от модулярности решетки, освещены в § 2, пункт 1; общие вопросы, в том числе аксиоматика дистрибутивных и модулярных решеток, обсуждаются в § 4; если раздел посвящен специальному классу решеток, то свойство, определяющее этот класс, почти всюду оговаривается лишь вначале, а далее предполагается выполненным до конца параграфа или пункта. Решетки, свободные в конкретном многообразии решеток (например, свободные дистрибутивные или свободные модулярные решетки), рассматриваются в основном в обзоре В. И. Игошина. Там же большей частью отражены работы, касающиеся характеризованности классов решеток и близких к этому понятий. С другой стороны, пункт 2 в § 2, кроме ортомодулярных решеток, включает ортомодулярные и близкие к ним упорядоченные множества.

§ 1. Дистрибутивные решетки

1. *Операции на классе дистрибутивных решеток. Некоторые общие вопросы.* Отметим сначала работы, касающиеся свободных произведений дистрибутивных решеток. Бэлбс [73, 8A263] показал, что в категории дистрибутивных решеток с 0 и 1 центр свободного произведения решеток изоморфен свободному произведению их центров. Блок дал топологическое доказательство этого факта [75, 3A365]. Корниш [77, 8A346] доказал, что свободное произведение ограниченных решеток L_1 и L_2 изоморфно решетке всех непрерывных монотонных функций из пространства Пристли решетки L_1 [71, 4A280] в дискретное пространство решетки L_2 . Другое описание свободного произведения $L_1 * L_2$ в классе дистрибутивных решеток с 0 и 1 получил Куэйкенбуш ^{*1}: $L_1 * L_2$ изоморфно подалгебре в L_1^S (здесь S — множество простых фильтров решетки L_2), порожденной элементами специального вида. Дейви ^{*2} передоказал этот результат топологическим методом. Некоторые, условия, касающиеся внутреннего строения свободного произведения, рассмотрел Лаксер ^{*3}.

Фрейзер [76, 12A396; 77, 5A216; 12A310], продолжая изучение тензорных произведений полурешеток и дистрибутивных решеток, дает доказательства основных результатов своей диссертации [72, 3A269], в последней работе делается обзор результатов двух предыдущих, обсуждается сходство и различие трех конструкций тензорного произведения. Некоторую характеристику векторных решеток, свободно порожденных дистрибутивными решетками, в терминах упорядоченного включения множества всех цепей V -неразложимых элементов исходной дистрибутивной решетки получил Бейнон [77, 12A303].

Двингер [74, 10A292] доказал, что класс подпрямых степеней счетной цепи содержит а) бесконечные свободные произведения дистрибутивных решеток, б) все однородные дистрибутивные решетки, в) все дистрибутивные решетки без минимальных или максимальных простых идеалов. Регулярным расширениям и свободным α -полным расширениям посвящены работы Якуба ^{*4}. Отображение σ дистрибутивной решетки в

^{*1} Quackenbush R. M. — Algebra Universalis (далее AU), 1972, v. 2, p. 393—394.

^{*2} Davey B. A. — AU, 1974, v. 4, p. 106—107.

^{*3} Lakser H. — Lattice Theory Conference. Houston (далее HLT), 1973, p. 156—168.

^{*4} Yakub F. M. — Rend. Ist. Mat. Univ. Trieste, 1972, v. 4, p. 148—155; [75, 2A343].

себя называется сдвигом, если $\sigma(a \wedge b) = \sigma(a) \wedge b$ для всех $a, b \in L$. Корниш [75, 5A285] установил, что совокупность $M(L)$ всех сдвигов является дистрибутивной решеткой, причем $M(L)$ есть максимальное расширение решетки L , содержащее ее в качестве V -плотного идеала. Якубик [77, 1A288] ввел понятие ω -изоморфизма, обобщающее слабый изоморфизм [67, 1A223]. Среди результатов, например, следующие: если L_1 — дистрибутивная решетка и L_2 — любая решетка, ω -изоморфная ей, то L_2 дистрибутивна, и существуют такие решетки P и Q , что L_1 изоморфна прямому произведению $P \times Q$, а L_2 изоморфна решетке $P \times Q'$, где Q' — решетка, дуальная к Q ; если хотя бы одна из решеток L_1 или L_2 не ограничена, то ω -изоморфизм является либо изоморфизмом, либо дуальным изоморфизмом. Прямые произведения слабых гомоморфизмов изучал Хайда [77, 8A354]. Плонка и Погунтке [77, 12A328] рассматривали различные аспекты теории независимости и получили критерий T -независимости подмножества элементов дистрибутивной решетки, аналогичный критерию Марчевского [64, 7A288]. Работы Ладзянской [75, 4A334; 6A425], касающиеся упорядоченных сумм дистрибутивных решеток, Бэлбса и Хорна [77, 12A302] о проективных покрытиях, Ривала и Сэндса [76, 3A328] о слабых вложениях отражены в обзоре В. И. Игошина.

2. *Подрешетки, идеалы и конгруэнции дистрибутивных решеток.* Ко и По [77, 4A312] описали конечные дистрибутивные решетки, у которых подрешетка Фраттини изоморфна четырехэлементной цепи, и поставили задачу описания конечных дистрибутивных решеток с подрешеткой Фраттини, изоморфной n -элементной цепи. В другой работе *⁵они указали условия, необходимые для того, чтобы конечная дистрибутивная решетка была изоморфна подрешетке Фраттини $\Phi(L)$ конечной решетки L , а также получили следующие результаты: 1) если L — конечная дистрибутивная решетка, у которой $\Phi(L) \neq \emptyset$ и $\Phi(L)$ не является цепью, то L содержит в качестве подрешетки $L_6 = 1 + 2^2 + 1$, $L_7 = 3^2 / \{(2, 0), (0, 2)\}$ или $L_8 = 2^2 + 2^2$ (здесь 2 и 3 — двух- и трехэлементные цепи); 2) существуют конечные дистрибутивные решетки K_i , $i = 6, 7, 8$, для которых $\Phi(K_i) \cong L_i$. Даны диаграммы решеток K_i , причем $|K_6| = 8$, $|K_7| = 25$, $|K_8| = 50$. Первоначальные результаты о подрешетках Фраттини дистрибутивных решеток можно найти в работе Чена, Ко и Тана [76, 2A374]). Используя топологию Пристли, Адамс *⁶

*⁵ Koh K. M., Poh K. S. — Nanta Math., 1974, v. 4, N 2, p. 86—93.

*⁶ Adams M. E. — AU, 1973, v. 3, p. 216—228.

показал, что для любой дистрибутивной решетки L существует такая дистрибутивная решетка L_1 , что $L \cong \Phi(L_1)$. Ко^{*7} установил следующее: дистрибутивность решетки эквивалентна тому, что любая ее выпуклая подрешетка является пересечением простых выпуклых подрешеток, и получил некоторые свойства решетки подрешеток дистрибутивной решетки. Ривал [73, 10A268; 75, 3A367] дал оценки для мощности и длины максимальной собственной подрешетки конечной дистрибутивной решетки.

Пусть D — класс всех дистрибутивных решеток, $A \in D$, $S(A)$ — множество всех подрешеток решетки A и ρ_A — отношение порядка на $S(A)$, содержащее теоретико-множественное включение. Секанина^{*8} называет систему $\{\rho_A \mid A \in D\}$ стабильной, если из $X \rho_A Y$ следует $f(X) \rho_B f(Y)$ для любых $A, B \in D$ и любого гомоморфизма $f: A \rightarrow B$. Изучается естественным образом упорядоченное множество стабильных систем. Доказывается, что оно обладает двумя максимальными элементами — σ и τ , причем $(S(A), \sigma)$ и $(S(A), \tau)$ не всегда являются решетками. Если A — цепь, то $(S(A), \sigma)$ и $(S(A), \tau)$ являются решетками тогда и только тогда, когда A конечна. Решетка L называется условно α -полной, если каждое непустое ограниченное сверху подмножество $X \subset L$, такое, что $|X| \leq \alpha$, имеет $\sup X$ в L и если выполняется двойственное условие. Якубик^{*9} в некоторых классах дистрибутивных решеток изучает вопрос о существовании наибольшей условно α -полной выпуклой подрешетки, содержащей данный элемент. В частности доказано, что если решетка L обладает относительными дополнениями, такая подрешетка существует для любого $x \in L$.

Бизер [76, 4A286] классифицирует дистрибутивные решетки по некоторым условиям на относительные аннуляторы (аннулятор a относительно b — это идеал $\langle a, b \rangle = \{x \in L : x \wedge a \leq b\}$). Эквивалентность различных условий для аннуляторов и простых идеалов дистрибутивной решетки с 0 доказал Дейви^{*10} (аннуляторами здесь и далее называются аннуляторы элементов решетки относительно нуля). Корниш доказал, что решетка нормальна тогда и только тогда, когда ее аннуляторы образуют подрешетку в решетке всех идеалов [73, 11A292]. Он изучал также α -идеалы, введенные им с исполь-

^{*7} Koh K. M. — Nanta Math., 1973, v. 6, N 1, p. 68—79.

^{*8} Sekanina M. — Lattice Theory (далее LT). Budapest, 1976, p. 379—393.

^{*9} Jakubik J. — AU, 1972, v. 2, N 3, p. 255—261.

^{*10} Davey B. A. — AU, 1974, v. 4, p. 316—322.

зованием аннуляторов. В другой работе Корниша [75, 5A283] получены две характеристики n -нормальных решеток аналогичные характеристикам нормальных решеток [73, 5A296; см. также 76, 10A200, с. 24]. Об одном приложении теории идеалов дистрибутивных решеток говорится в статье Корниша [76, 7A312].

Спид [74, 7A417] выделяет подкласс нормальных решеток — совершенно нормальные решетки, которые затем использует для изучения решетки нуль-множеств топологического пространства. Понятия стоуновского идеала и стоуновского фильтра вводит и изучает Чиньоли [73, 12A312]. Гаскил [73, 7A298] показал, что конечная дистрибутивная решетка вложима в решетку L тогда и только тогда, когда она вложима в решетку идеалов $I(L)$. Если L дистрибутивна, то L и $I(L)$ имеют одни и те же конечные подрешетки. Дистрибутивная решетка с 0 и 1 называется локальной, если она обладает единственным максимальным простым идеалом. Для любого максимального простого идеала $P \subset L$ Брезулеану [74, 7A416] определяет некоторую конгруенцию ρ_P и изучает естественный гомоморфизм решетки L в прямое произведение локальных решеток L/ρ_P .

Даются приложения полученных результатов к некоторым категориям дистрибутивных решеток, связанным с логикой. Связь между стабильными толерантностями и конгруенциями дистрибутивных решеток изучали Хайда и Зелинка [75, 6A417]. Простые фильтры рассматриваются в работах Раушер и Сабальского [76, 5A298; 6A77]. Чен и Тан^{*11} для произвольного конечного упорядоченного множества P строят дистрибутивную решетку с множеством простых идеалов, изоморфным P , и затем применяют эту конструкцию для построения свободной дистрибутивной решетки с четырьмя образующими.

3. *Решетки, или алгебры, Стоуна* (в дальнейшем сокращенно а. С.). В вышеуказанной работе Чен и Тан охарактеризовали конечные упорядоченные множества, представимые как множества простых идеалов а. С. Корниш [73, 11A292] доказал, что дистрибутивная решетка с 0 и 1 (с 0) является а. С. (обобщенной а. С.) тогда и только тогда, когда каждый ее простой идеал содержит единственный простой α -идеал (см. предыдущий пункт). Ряд результатов о подалгебрах Фраттини а. С. получил Ко [76, 7A364]. Более простое доказательство теоремы Чена-Гретцера о представлении а. С. тройками [76, 10A200, с. 24—25] предложил Катриняк [74, 4A239]. Бэлбс

^{*11} Chen C. C., Tan S. K.—Nanta Math., 1972, v. 5, N 3, p. 96—100.

[76, 7A394] охарактеризовал упорядоченное множество $P(L)$ простых идеалов а. с. L в терминах ассоциированной с ней тройки $\langle C(L), D(L), \varphi(L) \rangle$. В качестве следствия получено равенство $|P(L)| = |P(C(L))| + |P(D(L))|$ и новый метод восстановления а. с. по ее тройке. Указано условие, необходимое и достаточное для того, чтобы булева алгебра C и дистрибутивная решетка с 1 D однозначно определяли φ в тройке $\langle C, D, \varphi \rangle$, а также еще некоторые результаты о категории троек. Метод троек оказался плодотворным и при исследовании свободных а. с. Катриняк [73, 9A289; 77, 1A282] описал тройки, ассоциированные со свободными а. с. Если L и дуальная ей решетка являются а. с., то L называют дважды стоуновой (сокращенно д. а. с.). Хехт и Катриняк^{*12} описали свободные д. а. с. и регулярные свободные д. а. с. как дистрибутивные решетки, свободные относительно некоторой системы неравенств. Идеи восходят к работе Бэлбса и Хорна [71, 6A315]. По аналогии с тройками, Хехт и Катриняк описали свободные регулярные д. а. с. пятерками. В этой же работе решена проблема слов для д. а. с.

Дейви [73, 8A265] рассматривал m -стоуновые решетки, являющиеся обобщением обычных стоуновых. Свами и Рао [76, 2A377] показали, что тройки стоуновых решеток соответствуют полным предпучкам ограниченных плотных дистрибутивных решеток над булевым пространством и что а. с., определяемая такой тройкой, есть решетка всех сечений соответствующего пучка. Корниш развил идею представления пучками для обобщенных а. с. [76, 8A390]. Слабые гомоморфизмы а. с. рассмотрены в работе Глазека, Хехта и Катриняка^{*13}.

4. *Произвольные дистрибутивные решетки с псевдодополнениями, с относительными дополнениями.* Корниш [77, 3A264] рассмотрел представление дистрибутивных решеток с псевдодополнениями сечениями пучков, подобное указанному ранее представлению обобщенных алгебр Стоуна. В работе [74, 2A296] он получил условия, характеризующие ядра конгруенций дистрибутивных решеток с псевдодополнениями, описал наибольшую и наименьшую конгруенции, имеющие данное ядро, и дал характеристики а. с. в тех же терминах. Характеризацию сохраняющих псевдодополнения главных конгруенций и некоторые следствия из нее получил Лаксер [73, 11A293]. Ряд теорем о конгруенциях дистрибутивных решеток

^{*12} Hecht T., Katrinak T. — LT, p. 77—95.

^{*13} Glazek K., Hecht T., Katrinak T. Contrib. Univ. Alg., Coll. Math. Soc. Janos Bolyai, 17, 1977, p. 145—159.

с псевдодополнениями содержится в работе Бизера [77, 7A312]. Свойства упорядоченного множества V -неприводимых элементов решетки с n образующими, свободной в многообразии дистрибутивных решеток с псевдодополнениями, рассмотрел Уркхарт *¹⁴. Вронский [77, 9A70; 354] показал, что существует континуум неизоморфных подпрямо неразложимых псевдобулевых алгебр с двумя образующими, и получил некоторые следствия этого результата. В работе Романовской [77, 12A298] изучаются подпрямо неразложимые алгебры в многообразиях двойных p -алгебр и другие вопросы теории этих многообразий.

Катриняк *¹⁵ отмечает, что дистрибутивная решетка с псевдодополнениями является брауэровой тогда и только тогда, когда брауэровой является ее решетка плотных элементов. Конгруенциям двойных p -алгебр и регулярных двойных p -алгебрах (дистрибутивных) посвящена другая его работа *¹⁶. Адамс [75, 3A366] доказал, что если в дистрибутивной решетке с 0 и 1, обладающей псевдодополнениями, каждый фильтр является пересечением максимальных фильтров, то эта решетка булева. Он построил дистрибутивную решетку, в которой каждый идеал и фильтр являются пересечениями максимальных, но которая не обладает относительными дополнениями (отрицательный ответ на вопрос Монтейро). Ранее пример такой решетки указал Бэлбс *¹⁷. Корниш [76, 12A92] дал новое доказательство теоремы Гретцера-Шмидта: дистрибутивная решетка обладает относительными дополнениями тогда и только тогда, когда ее простые идеалы, упорядоченные включением, образуют антицепь. Берд и Мена [76, 7A367] привели контрпример к теореме Гретцера [72, 6A312, теорема 28] и доказали ее уточненную версию. Представлению множествами дистрибутивных решеток с относительными дополнениями посвящена работа Файнштейна [76, 3A327]. Накано и Ромбергер [75, 5A284] получили для дистрибутивных решеток с 0 некоторое обобщение теоремы Гливенко.

Якубик *¹⁸ исследует максимальные условно α -полные подрешетки дистрибутивных решеток с относительными дополнениями. Свойства конгруенций обобщенных булевых решеток, то есть дистрибутивных решеток с 0, обладающих относи-

*¹⁴ Urquhart A. — AU, 1973, v. 3, p. 13—15.

*¹⁵ Katrinák T. — Chechosl. Math. J., 1972, v. 22. (97), p. 427—434.

*¹⁶ Katrinák T. — AU, 1973, v. 3, p. 238—246.

*¹⁷ Balbes R. — AU, 1972, v. 2, p. 389—392.

*¹⁸ Jakubik J. — AU, 1972, v. 2, p. 255—261.

тельными дополнениями, изучали Берд, Мена и Трой [76, 1A330]. Бизер распространяет на решетки с псевдодополнениями известные результаты о булевых алгебрах, касающиеся функций, относительно которых стабильны все конгруенции, и разрешимости уравнений; решается проблема тождества для дистрибутивных решеток с псевдодополнениями.

5. *Другие вопросы.* Дорнингер [75, 5A275] определил модулярную полиномиальную решетку над конечной дистрибутивной решеткой L и изучил некоторые ее свойства. В частности установлено, что она изоморфна решетке полиномиальных функций над L тогда и только тогда, когда L — цепь.

Пусть M — множество V -неразложимых элементов решетки L , $[x]$ — главный идеал, порожденный элементом $x \in L$, и $M_x = M \cap [x]$. Лавалле [77, 3A253] показал, что конечная решетка L дистрибутивна тогда и только тогда, когда $M_x \cup M_y = M_{x \vee y}$ для всех $x, y \in L$. Берман и Келер [77, 4A316] нашли алгоритм, позволяющий по данному конечному упорядоченному множеству X вычислить мощность дистрибутивной решетки с множеством V -неразложимых элементов, изоморфным X . Две характеристики дистрибутивных конечных планарных решеток в терминах V -неразложимых элементов даны Ченом и Ко [74, 1A296]. Шмуэль [76, 12A381] изучает упорядоченное множество $A \circ B$ отображений $T: A \rightarrow B$, каждое из которых вместе с некоторым $T^*: B \rightarrow A$ образует связь Галуа между упорядоченными множествами A и B . Получен ряд результатов для дистрибутивных и вполне дистрибутивных решеток, в частности, доказано, что $A \circ B$ является дистрибутивной решеткой, если A и B суть конечные дистрибутивные решетки.

В дистрибутивной решетке L с 0 и 1 элементы $0 = e_0 \leq e_1 \leq \dots \leq e_{n-1} = 1$ образуют цепной базис, если каждый элемент $x \in L$ имеет представление
$$x = \bigvee_{1 \leq i \leq n-1} x_i e_i,$$
 где все x_i при-

надлежат центру решетки L . Работы Эпштейна и Хорна [75, 9A255], Салони [76, 12A380], Трачика [76, 2A111], Трачика и Зарембского [76, 11A369] посвящены изучению решеток с цепным базисом и их связей с алгебрами логики. Райхель [76, 11A91; 77, 8A345] ввел понятие разделяющего базиса и изучал условия его существования в дистрибутивных решетках с 0 (в терминах стоуновского представления). Троттер [76, 5A299] доказал теорему о размерности дистрибутивных решеток, связанную с представлениями множествами. Монжарде [76, 2A376] применил свой результат об элементах свободной дистрибутивной решетки для описания некоторых семейств

множеств. Оценкой на решетке L называется такое ее отображение f в абелеву группу, что $f(a \vee b) + f(a \wedge b) = f(a) + f(b)$ для всех $a, b \in L$. Для дистрибутивных решеток оценки образуют кольцо, изучавшееся Гайсзингером [73, 12A311; 74, 6A381; 9A323]. Отмечены приложения к теории меры, комбинаторике и представлениям дистрибутивных решеток. Дорнингер [76, 9A320] доказал, что решетка дистрибутивна тогда и только тогда, когда все ее полиномиальные функции имеют степень 1 или 2.

Некоторые условия слабой счетной дистрибутивности решетки отметил А. Г. Порошкин [77, 7A294]. М. Мурти и В. Мурти^{*19} для локально конечной дистрибутивной решетки L рассмотрели множество всех функций из $L \times L$ в некоторое фиксированное поле и получили условия, эквивалентные аддитивности $(f(x, y) + f(z, w) = f(x \vee z, y \vee w))$, если $x \leq y$, $z \leq w$ и $x \wedge z = y \wedge w$ и полной аддитивности $(f(x, y) = f(x, z) + f(z, y))$, если $x \leq z \leq y$. М. Г. Рабинович [74, 3A233] продолжает изучение вполне разложимых решеток. О его предыдущих работах сказано в [76, 10A200, с. 26]. Комбинаторные свойства решеток с некоторыми условиями конечности изучал Стенли [76, 4B415]. Янович [76, 12A220] описал дистрибутивные решетки, координатизируемые некоторым типом бэровских полугрупп. Некоторая аналогия между пространствами Риса, коммутативными кольцами и дистрибутивными решетками с 0 установлена в работе Гюисманса [74, 11A357].

Изучению абелевой группы G_L , порожденной дистрибутивной решеткой L , посвящены работы Л. В. Архиповой [76, 6A269; 77, 2A208]. Ею доказано, что если $a_0 < a_1 < \dots < a_n$ — произвольный композиционный ряд решетки L , то G_L — свободная абелева группа ранга $n+1$ и $a_i, i=0, 1, \dots, n$ — ее свободные образующие. Множество всех неприводимых элементов решетки L длины n является системой свободных образующих группы G_L . Если L_1 — конечная подрешетка решетки L , то G_{L_1} изоморфно вкладывается в G_L . Отсюда вытекает, что G_L является группой без кручения для произвольной решетки L . Предлагается конструкция группы G_L как предела прямого спектра свободных групп конечного ранга. Если L счетна, то G_L является свободной группой счетного ранга. Свобода группы G_L независимо была установлена Хиллом и Субраманьяном [76, 12A236]. Дистрибутивные решетки с дополни-

^{*19} Murty M. R., Murty V. K. Characterization of additive incidence functions. Dept. Math., Carleton Univ., Ottawa, 1975, 16 pp.

тельной унарной операцией изучались Берманом [77, 9A372], а также И. В. Витенько и В. В. Николенко [74, 7A431]. Последняя статья касается эквациональной теории таких алгебр.

§ 2. Модулярные, ортомодулярные, полумодулярные и близкие к ним решетки

1. Геометрические вопросы. В книге Ф. Маеды и Ш. Маеды «Теория симметрических решеток» [73, 7A291, а также 76, 10A200, с. 27] указано много проблем, привлекающих внимание математиков и способствующих активному развитию этого направления. Константен [74, 3A230] и Падманабхан [75, 5A286] независимо решили положительно первую проблему, показав, что каждая $\perp$ -симметричная решетка с относительными полуортодополнениями является M -симметричной. Ш. Маеда ^{*20} отмечает, что вторая и третья проблемы (существуют ли не M -симметричные AC -решетки и не ∇ -симметричные AC -решетки) положительно решены Яновичем. Като и Ш. Маеда [75, 9A243] доказали, что класс M -симметричных решеток не замкнут относительно пополнений сечениями (отрицательное решение четвертой проблемы).

Решетка L называется статичной, если для любого атома $p \in L$ условие $p \leq a \vee b$ влечет наличие таких конечных элементов a_1, b_1 , что $p \leq a_1 \vee b_1$, $a_1 \leq a$ и $b_1 \leq b$; решетка конечно-статична, если условие $p \leq q \vee a$, где p, q — атомы, влечет существование такого конечного элемента a_1 , что $a_1 \leq a$ и $p \leq q \vee a_1$. Эти понятия были введены и изучались Вилле [68, 5A345] и Яновичем [70, 11A221]. Янович [76, 6A320] приводит примеры статичных и конечно-статичных решеток с условиями покрытия и, значит, являющихся AC -решетками. Там же доказано, что каждая слабо модулярная AC -решетка статична и, следовательно, M -симметрична. Статья Яновича [77, 7A282] посвящена изучению ∇ -отношения в некоторых атомичных решетках с транзитивной перспективностью атомов. Получены пять условий, каждое из которых эквивалентно ∇ -симметричности решетки. Янович и Коте [77, 11A326] называют решетку конечно-дистрибутивной, если каждый ее элемент, являющийся объединением атомов, стандартен. Они приводят пример конечно-дистрибутивной атомичной решетки, в которой имеются как модулярные, но нестандартные, так и стандартные, но не модулярные элементы, а также пример M -симметричной,

^{*20} Maeda S.— LT, 1976, p. 227—229.

конечно-дистрибутивной атомичной решетки с несимметричным ∇ -отношением (решение третьей проблемы Маеда). Доказано, что ∇ -симметричность конечно-дистрибутивной атомичной решетки эквивалентна ее дистрибутивности.

Ш. Маеда изучает решетки с независимыми дополнениями, или AC -решетки [70, 7A270, с. 115]. Он вводит понятия дуального независимого дополнения, сильно независимого дополнения, доказывает, что модулярные решетки с дополнениями и ортомодулярные решетки обладают сильно независимыми дополнениями; в свою очередь, наличие любого вида независимых дополнений влечет наличие относительных дополнений. В работе показано, что 1) решетка разбиений или решетка Вилкокса, обладающие независимыми дополнениями, модулярны, 2) решетка замкнутых подпространств банахова пространства ортомодулярна, 3) существует три типа пространств Фреше, у которых решетка замкнутых подпространств обладает независимыми дополнениями.

Серия работ Штерна [76, 9A319; 77, 2A356; 9A356] посвящена исследованию условий, при которых идеал $F(L)$ конечных элементов AC -решетки L является стандартным. Он показал также ^{*21}, что $F(L)$ нейтрален тогда и только тогда, когда он стандартен и решетка L статична; AC -решетка L модулярна тогда и только тогда, когда $F(L)$ нейтрален и является модулярной подрешеткой в L . Статья Штерна [78, 1A270] посвящена характеристике конечно-модулярных AC -решеток n -й степени, являющихся обобщением n -ступенной геометрии Вилле [68, 7A547]. При $n=0$ — это обычные конечно-модулярные AC -решетки, а при $n=1$ — сильно планарные AC -решетки. Штерн доказал простоту немодулярной аффинной матроидной решетки, удовлетворяющей сильной аксиоме параллельности ^{*22}. О радикалах полных AC — решеток см. его работу [76, 11A93]. Некоторое условие для модулярности атомичной непрерывной сверху решетки получил Ху [75, 10A322]. Ш. Маеда и Холланд [76, 11A323] изучали решетку проекций бэровского* -кольца и, в частности, получили условия, при которых перспективность проекций транзитивна. Уточнение теоремы 2.7 из известной книги фон-Неймана «Непрерывная геометрия» предложил Левиг [75, 10A328].

Кантор указал условия, при которых n -мерная геометрическая решетка вложима в n -мерную модулярную геометриче-

^{*21} Stern M.— LT, p. 421—425.

^{*22} Stern M.— Publ. Math., Debrecen, 1975, v. 22, p. 43—46.

скую решетку [75, 4A349]. Липшиц доказал неразрешимость ограниченной проблемы равенства слов для конечномерных проективных геометрий и конечных модулярных решеток, а также проблемы равенства слов для конечно определенных модулярных решеток [75, 3A357]. Отмечается, что последний результат был независимо получен Хатчинсоном. В. Н. Салий и Н. П. Козырь [74, 11A353] установили, что решетка является геометрической тогда и только тогда, когда она изоморфна решетке подалгебр некоторой идемпотентной алгебры. Некоторые числовые неравенства для геометрических решеток получены Грином [76, 2A763] и Доулингом и Уилсоном [76, 1A331]. Модулярные элементы геометрических решеток изучал Стенли *23.

Херрман [74, 1A297] рассматривал квазипланарные решетки и показал, что каждая такая решетка вложима в решетку подпространств некоторой дезарговой проективной геометрии. Любая конечно порожденная квазипланарная решетка является конечной. С. А. Анищенко [73, 11A300] установил некоторые свойства модулярных решеток ранга 3, связанных с ельмсловыми плоскостями. В работе Лаксера [74, 7A689] рассматриваются ассоциированные с решетками симплициальные комплексы.

К структурно-геометрическому направлению можно отнести также работы Максвела [74, 7A413], Мораша [73, 12A307], Сораче [77, 11A328].

2. *Ортомодулярные решетки и ортомодулярные упорядоченные множества.* Сборник «Логико-алгебраический подход к квантовой механике» [76, 5A67], реферировавшийся постатейно, содержит ряд обзорных статей, многие из которых были напечатаны ранее в других изданиях. Так, например, 76, 6A213 — обзор Пула [69, 1B680] о связи между ортомодулярными решетками, бэровскими* -полугруппами и логикой квантовой механики; 76, 5A186 — статья Фоулиса [61, 8A234], основополагающая в теории координатизации ортомодулярных решеток; 76, 5A301 — обзор Холланда [72, 4A342], в который вошли основные результаты теории ортомодулярных решеток до 1966 года.

Янович [76, 12A220] выделяет некоторый тип бэровских полугрупп и описывает координатизируемые ими ортомодулярные решетки (о. р.). Шелп [76, 1A187] показал, что для любого семейства полных атомных булевых алгебр существует

*23 Stanley R. P.— AU, 1971, v. 1, p. 214—217.

частичная *-полугруппа отношений, координатизирующая ортомодулярное упорядоченное множество (о. у. м), получающееся «склеиванием» [71, 11Б949] данных алгебр и содержащая все бэровские *-полугруппы отношений, координатизирующие эти алгебры. Хаскинс, Гадер и Гричи [75, 9А248] переносят на о. у. м. классические теоремы фон-Неймана о перспективности: 1) в полумодулярном о. у. м. конечной длины перспективность является эквивалентностью на множестве атомов; 2) центр таких о. у. м. порождается супремумами классов эквивалентности перспективных атомов; 3) элемент принадлежит центру тогда и только тогда, когда он имеет единственное дополнение. Джефкот и Спирс [76, 3А324] установили для атомного ортополного о. у. м P эквивалентность следующих условий: 1) пополнение сечениями $\overline{P}$ удовлетворяет условию покрытия; 2) P является решеткой; 3) P является полной решеткой; 4) P и $\overline{P}$ ортоизоморфны; 5) $\overline{P}$ является о. р. Если все цепи в P конечны, то к этому списку условий можно добавить еще два: 6) $\overline{P}$ — модулярная решетка; 7) $\overline{P}$ является M -симметричной решеткой.

Кетлин [73, 9Б756] рассмотрел гипероктантное свойство полной атомной ортомодулярной решетки (о. р.): для любого семейства $\{a_\alpha\}$ не менее чем двух атомов существует такой атом q , что $q \leq \bigvee a_\alpha$ и q не перестановочен в этом неравенстве ни с одним из a_α . Мораш [73, 12А307] аксиоматически определил гильбертовы решетки, высказав гипотезу, что решетками замкнутых подпространств сепарабельного гильбертова пространства исчерпываются все такие решетки, изучил некоторые их свойства и ввел понятие биссектора угла для пары ортогональных атомов. Он показал [77, 4А311], что бесконечномерная гильбертова решетка, обладающая биссекторным свойством (биссектор существует для любой пары таких атомов), обладает и гипероктантным свойством. Две теоремы, согласующиеся с вышеупомянутой гипотезой, доказаны в его работе [75, 1Б839]. Об атомах о. р. пишет Кетлин в статье [73, 9Б756], в которой получен ряд аналогов известной теоремы о гильбертовых пространствах. Работа Мораша [76, 8Б950] также посвящена изучению о. р., связанных с гильбертовыми пространствами.

Холанд [74, 7А415] вводит два бинарных отношения на о. р., с помощью которых определяется класс равномерных решеток. Основным результатом работы является условие ортоизоморфизма интервалов $[0, a]$ и $[0, b]$ для проективных ор-

тогональных элементов a и b (в равномерных решетках эти условия выполняются). Рюттиман *²⁴ указал условия, необходимые и достаточные для того, чтобы произведение проекции Сасаки и симметричного оператора замыкания на о. р. было проекцией, и доказал, что любая проекция представима в виде такого произведения. Адамс [73, 12A310] определил подпрямое произведение о. у. м. и показал, что любая конструктивная решетка [73, 4A393] является таким подпрямым произведением булевых решеток, из которых она сконструирована. Следствие: всякая конструктивная решетка вложима в булеву. Работы Берана [74, 8A287, 9A321; 76, 3A322] посвящены исследованию разрешимости о. р. и обобщенных о. р. [76, 10A200, с. 29]. В частности, доказано, что разрешимость о. р. эквивалентна ее дистрибутивности; обобщенная о. р. разрешима в нетривиальном многообразии тогда и только тогда, когда она принадлежит этому многообразию. В работе Берана [76, 8A397] рассматриваются свойства некоторых фактор-решеток обобщенных о. р., называемых рефлексиями и корефлексиями. Показано, что орторешетка с относительными дополнениями тогда и только тогда ортомодулярна, когда ортомодулярна ее рефлексия.

Брунс и Келмбах *²⁵ предложили конструкцию разложения конечно порожденной о. р. в прямое произведение булевой алгебры и о. р. специального вида и применили ее для изучения строения свободных о. р. В этой же работе введено «одноточечное» расширение L' о. р. L : L' является о. р., порожденной множеством $L+1$, причем 0 и 1 в L' и L совпадают, а ортодополнения в L' продолжаются из L . Грейвс и Селесник [73, 9A288] строят для о. р. представление, в дистрибутивном случае сводящееся к стоуновскому. Келмбах [77, 10A188] показала, что любая решетка является подрешеткой некоторой о. р. и потому не существует специального решеточного тождества, выполняющегося на всех ортомодулярных решетках. Шраг [77, 4A223] установил, что любая конечная группа является группой автоморфизмов некоторой конечной ортомодулярной решетки. Об о. р., являющихся обобщением однородных булевых алгебр, пишут Рэндел, Янович и Фоулис [73, 11A288].

В. В. Калинин [76, 6A315; 9A326; 77, 11A325] выясняет условия, при которых существует функция размерности на о. у. м. Булевым называется такое о. у. м., в котором ортогональны

*²⁴ Rüttiman G. T.—Canad. Math. Bull., 1975, v. 18, N 2, p. 263—267.

*²⁵ Bruns G., Kalmbach G.—HLT, p. 398—408.

любые два элемента, имеющие нулевое пересечение. Клуковский [75, 9A256; 76, 6A317] доказал, что каждое полное атомное булево о. у. м. является булевой алгеброй, и привел пример булева о. у. м., не являющегося булевой алгеброй. Он установил также, что центр булева о. у. м. есть булева алгебра и что класс булевых о. у. м. не замкнут относительно гомоморфных образов. Построено естественное расширение булева о. у. м. до булевой алгебры и получены некоторые результаты топологического характера. Лапиньской-Ружальской [76, 6A316] показано, что предположение об атомности в первом из упомянутых результатов Клуковского не является необходимым. Состоянием о. у. м. L называется такое отображение $f: L \rightarrow [0, 1]$, что $f(1) = 1$ и $f(a_1 \vee \dots \vee a_n) = f(a_1) + \dots + f(a_n)$, если $a_i \perp a_j$ при $i \neq j$. Множество M состояний называется полным, если $f(a) \leq f(b)$ для всех $f \in M$ влечет $a \leq b$. Состояния о. у. м. изучались Мачиньским и Трачиком [73, 7A293; 75, 4A339]. Они показали, что булево о. у. м. допускает полное множество состояний (хотя, вообще говоря, существуют о. у. м., не имеющие ни одного нетривиального состояния).

Характеризации о. у. м. в терминах частичных импликационных алгебр, являющихся обобщением импликационных алгебр Эбота [69, 2A89], посвящена статья Кеммака [76, 9A321]. Возможность восстановления о. у. м. по некоторому семейству его подмножеств изучал Майер [75, 2A345]. Рюттиман [75, 7A412] получил условие, необходимое и достаточное для того, чтобы упорядоченное множество с инволюцией было ортомодулярной решеткой. Это условие формулируется в терминах некоторого оператора замыкания.

Работы Эбота [76, 12A96], Гричи и Гадера [76, 5A68], Келмбаха [75, 10A87], Гричи [75, 8A59], Пизяка [75, 5A89], К. и С. Бугайских [75, 3A51] носят логический характер. Часть из них подробнее отражена в обзоре Л. Л. Эсакиа.

3. Полумодулярные и близкие к ним решетки. Г. Сас [76, 9A318] рассматривает вопросы аксиоматики полумодулярных решеток и наличия максимального и минимального дополнения у произвольного элемента. Он показывает, что в полумодулярной решетке с дополнениями каждый элемент конечной высоты обладает как минимальным, так и максимальным дополнением.

Под шириной $w(L)$ (width) упорядоченного множества или решетки L понимают наибольшую из длин ее антицепей, а b -шириной $b(L)$ (breadth) называют такое наименьшее натуральное n , что из любого набора m элементов ($m > n$) можно

выбрать n -элементное подмножество, имеющее тот же инфимум. Модулярная решетка имеет b -ширину n , если она содержит упорядоченное подмножество, изоморфное 2^n , и не содержит подмножеств, изоморфных 2^{n+1} . В последние годы понятие b -ширины играет существенную роль во многих исследованиях. Пусть $J(L)[M(L)]$ есть множество всех V -неразложимых ($\wedge$ -неразложимых) элементов решетки L , $D(L)$ — множество ее дважды неразложимых элементов. Ривал [77, 12A307] установил справедливость следующих неравенств для конечной полумодулярной решетки L , у которой $b(L) \leq 2$: 1) $|M(L)| \leq |J(L)|$, причем равенство достигается тогда и только тогда, когда L модулярна; 2) $\omega(J(L)) = \omega(D(L)) \leq \omega(M(L)) = \omega(J(L) \cup M(L))$. Последнее обобщает результаты Ли [75, 1A353] и Вилле [77, 8A347].

Решетка называется антидистрибутивной, если она не дистрибутивна и для всякой ее цепи $a < b < c < d$, где последующий элемент покрывает предыдущий, по крайней мере, один из интервалов $[a, c]$, $[b, d]$ является недистрибутивной решеткой. Ф. Смит [75, 2A349] доказал, что антидистрибутивная полумодулярная конечномерная решетка проста тогда и только тогда, когда каждый ее элемент имеет локальное дополнение. Ш. Маеда [75, 4A328] изучает свойства локально модулярных и локально дистрибутивных решеток. Макдональд [76, 3A329] рассматривает свойства множества простых интервалов локально конечной, локально полумодулярной локальной решетки (то есть упорядоченного множества, в котором каждый непустой интервал является конечной полумодулярной сверху решеткой), а в работе [76, 5A300] распространяет на такие решетки некоторые результаты Д. Смита [70, 1A103, 5A93] об арифметических функциях.

4. *Модулярные решетки с псевдодополнениями.* Обычно такая решетка рассматривается как универсальная алгебра $(L, V, \wedge, *, 0, 1)$, называемая p -алгеброй, или, если в ней выполняется тождество Стоуна $x^* V x^{**} = 1$, s -алгеброй. Изучению таких алгебр посвящена серия работ Катриняка. В [74, 3A228] подробно исследуются свойства модулярных s -алгебр: их конгруенции, проективные и слабо проективные интервалы, множества $D(L)$ и $B(L)$ плотных и замкнутых элементов алгебры L . Доказано, что модулярная s -алгебра L подпрямона неразложима тогда и только тогда, когда $D(L)$ является подпрямона неразложимой решеткой и для любого $a \in B(L)$, $a \neq 0, 1$, множество $F_a = \{x \in L \mid x^{**} = a\}$ содержит не менее двух элементов. Получен ряд интересных результатов о решетке мно-

гообразий модулярных s -алгебр. Теории многообразий модулярных p -алгебр посвящены работы [74, 11A363] и [75, 5A300]. В последней получено условие, необходимое и достаточное для подпрямой неразложимости модулярной p -алгебры. Катриняк^{*26} доказал, что такая p -алгебра подпрямой неразложима тогда и только тогда, когда подпрямой неразложима алгебра ее стоуновых элементов, и привел еще два эквивалента подпрямой неразложимости (элемент a называется стоуновым, если $a * \bigvee a^{**} = 1$). В работе Катриняка и Медерли^{*27} получена характеристика модулярных p -алгебр тройками, подобная характеристике стоуновых алгебр. Катриняком^{*28} описаны тройки, ассоциированные с подпрямой неразложимыми модулярными p -алгебрами, у которых множество плотных элементов изоморфно M_n (модулярная недистрибутивная двумерная решетка с n атомами). В работе Медерли^{*29} изучаются свойства полных модулярных p -алгебр и такие алгебры характеризуются в терминах троек. Романовская и Фриз [77, 8A348] исследуют подпрямой неразложимые двойные модулярные p -алгебры.

5. *Конечные модулярные решетки.* В работе Вилле [77, 4A315] описаны все конечные M -свободные (то есть свободные в многообразии всех модулярных решеток) произведения конечных модулярных решеток. Оказалось, что число сомножителей конечного M -свободного произведения не превышает 3. Следуя общему определению Небауэра [74, 8A292], Вилле называет модулярной полиномиальной решеткой $L(n, M)$ от n переменных над модулярной решеткой L M -свободное произведение L и n одноэлементных решеток. Решением вопроса Дорнингера и обобщением некоторых его результатов [75, 5A275] служит полученное Вилле описание конечных решеток $L(n, M)$. В последнее время большое внимание уделяется исследованию конечных модулярных решеток, M -свободно порожденных различными частичными решетками и упорядоченными множествами. Вилле^{*30} указал условия, эквивалентные конечности решетки $FM(n_1 + n_2 + \dots + n_m)$, где n_i — конечные цепи, а также условия [73, 11A284], эквивалентные конечности ре-

^{*26} Katrinák T.—AU, 1972, v. 2, p. 166—173.

^{*27} Katrinák T.—Mederly P. AU, 1974, v. 4, N 3, p. 301—315.

^{*28} Katrinák T.—AU, 1973, v. 3, p. 321—327.

^{*29} Mederly P.—Contrib. Univ. Alg., Coll. Math. Soc. Janos Bolyai, 17, 1977, p. 145—159.

^{*30} Wille R.—AU, 1973, v. 3, p. 131—138.

шетки $FM(H)$, где H — произвольное упорядоченное множество. Одно из условий следующее: H не содержит подмножеств, изоморфных четырехэлементной антицепи или пятиэлементному упорядоченному множеству указываемого в работе вида. К этому же направлению относятся работы Дея, Херрманна, Вилле^{*31} и Херрманна [77, 9A359] (см. также обзор Вилле по конечным решеткам).

Вилле [77, 8A347] установил некоторые свойства множеств неразложимых элементов конечной модулярной решетки, обобщенные затем Ривалом в работе [77, 12A307]. Гантер и Ривал^{*32}, а также Г. Ч. Куринной [73, 9A287] передоказывают теорему Дилуорса о том, что в конечной модулярной решетке число элементов, покрываемых в точности n элементами, равно числу элементов, покрывающих точно n элементов. Другие работы Г. Ч. Куринного о конечных модулярных решетках посвящены изучению подпрямых произведений, условиям, при которых решетка определяется упорядоченным множеством неразложимых элементов, и представлению решетки в виде объединения своих интервалов [75, 12A283, 284; 73, 11A279]. Последняя конструкция в более общем виде (S -склеенные суммы решеток) построена Херрманом [73, 11A278], который показал, что каждая модулярная решетка конечной длины является S -склеенной суммой своих максимальных атомичных интервалов, где S — множество наименьших элементов этих интервалов. Определение регулярной конечной модулярной решетки, использующее число максимальных цепей, проходящих через каждый данный элемент, и характеристику этой решетки в тех же терминах можно найти в работе Гриммета [74, 3A229].

6. *Другие вопросы.* Вилле [74, 7A422] доказал, что каждая конечно порожденная модулярная решетка конечной ширины конечна. Е. Т. Шмидт [76, 8A404] установил существование конечно порожденных простых модулярных решеток бесконечной длины и конечно порожденных модулярных решеток, не содержащих простых факторов. В другой работе [73, 11A277] он ввел понятие I -независимого подмножества элементов модулярной решетки L конечной длины (I — идеал решетки L) и понятие I -прямого разложения элемента. Он доказал теорему о I -прямых разложениях единицы, которая при $I=0$ дает теорему Шмидта—Оре, а при $I=L$ теорему Куроша—Оре. Плон-

*31 Day A., Herrmann Ch., Wille R.—AU, 1972, v. 2, p. 317—323.

*32 Ganter B., Rival I.—AU, 1973, v. 3, p. 348—350.

ка и Вилле [75, 7A307] показали, что если L — модулярная решетка конечной длины, $H(L)$ — граф ее диаграммы Хассе и t — операция медианы, то группы автоморфизмов графа $H(L)$ и алгебры (L, t) совпадают. Равенство длин упорядоченных множеств V -неразложимых и $\wedge$ -неразложимых элементов в модулярной решетке конечной длины установили Гантер и Ривал [76, 12A389].

Изучению максимальных собственных подрешеток модулярных решеток конечной длины посвящена работа Ривала ^{*33}. Форт ^{*34} рассматривал решетки, все интервалы которых имеют конечную длину, и нашел два условия, каждое из которых эквивалентно модулярности. Его результат можно рассматривать как некоторое усиление теоремы 1.9 из книги Ф. Маеды и Ш. Маеды [73, 7A291]. Работа Якубика [76, 5A302] касается характеризованности модулярных решеток локально конечной длины (см. обзор В. И. Игошина в настоящем сборнике). Модулярным решеткам с условиями обрыва посвящены работы Ньюмена [73, 7A279] и В. П. Солтана [75, 12A285]. Хун ^{*35} продолжает изучение n -дистрибутивных решеток, которые теперь используются во многих исследованиях. Среди его результатов отметим следующие: 1) для произвольной модулярной решетки L ее n -дистрибутивность эквивалентна условию: решетка идеалов $I(L)$ не содержит подрешетки, изоморфной решетке подпространств неприводимой проективной геометрии размерности n ; 2) модулярная решетка с дополнениями n -дистрибутивна тогда и только тогда, когда ее примитивная ширина $\leq n$; 3) подпрямо неразложимые n -дистрибутивные решетки с дополнениями — это решетки подпространств неприводимых проективных геометрий размерности $\leq n$. Дуайен и Херрман ^{*36} показали, что если модулярная решетка не содержит подрешетки, изоморфной M_m , ни для какого m , то она является n -дистрибутивной для некоторого n .

Вводя для любой ограниченной дистрибутивной решетки L некоторые дополнительные унарные операции, Е. Т. Шмидт [75, 10A313] строит такую модулярную решетку L' , $L \subset L'$, что каждая конгруенция алгебры L имеет единственное расширение до конгруенции решетки L' . Из этой конструкции выво-

^{*33} Rival I.— Canad. Math. Bull., 1975, v. 18, N 1, p. 95—98.

^{*34} Fort A.— Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, 1974, v. 51, p. 269—273 (1975).

^{*35} Huhn A.— LT, p. 137—147; [76, 10A200, с. 43].

^{*36} Doyen J., Herrmann Ch.— LT, p. 45—49.

дится следующий результат: всякая дистрибутивная решетка изоморфна подрешетке простой модулярной решетки.

Фриз ^{*37} изучает модулярные решетки, у которых b -ширина равна 2, а Херрман ^{*38} — модулярные решетки, у которых длина ≤ 6 , а b -ширина ≤ 3 . Порядковой размерностью (или размерностью Душника—Миллера) упорядоченного множества $(P, \leq)$ называется такое наименьшее кардинальное число m , что $\leq$ есть пересечение m линейных порядков на данном множестве. Вилле [75, 2A344] вывел два условия, эквивалентные тому, что модулярная (или дистрибутивная) решетка имеет порядковую размерность ≤ 2 .

Хайда и Зелинка [75, 6A417] для дистрибутивных и модулярных решеток исследуют связь между стабильными толерантностями и конгруенциями. В работе Хайды [75, 6A417] получено некоторое условие стабильности толерантности. В работах Фриче [75, 2A222] и Фриче и Рихтера [75, 10A213] для алгебраических модулярных решеток доказывается некоторый аналог критерия Куликова о разложимости примарной абелевой группы в прямую сумму циклических групп.

Бесконечный дистрибутивный закон в полных модулярных решетках изучает Хавиар [75, 3A368]. Е. Н. Мочульский [74, 3A234] продолжает изучать прямые разложения элементов в решетках, близких к модулярным. Рассматривая дискретные решетки (то есть решетки, все ограниченные цепи которых конечны), Якубик [76, 1A337] показал, что из изоморфизма неориентированных графов двух таких решеток и модулярности (дистрибутивности) одной из них следует модулярность (дистрибутивность) другой. Кеймерон [77, 2A357] доказал, что в модулярной решетке с дополнениями не существует согласованного плотного порядка Риса [74, 5A263], и привел пример немодулярной решетки с дополнениями, обладающей таким порядком. Работа Погунтке [75, 10A315] примыкает к исследованиям модулярных решеток направления Гельфанда—Пономарева (см. обзор В. И. Игошина). Об отношениях Цассенхауза и композиционных рядах пишут Норонья и Алмейда [74, 7A420]. Действие конечных групп в модулярных решетках изучал Дж. Хаджиев [77, 9A266], а модулярные решетки с выделенным подмножеством — Фелтингс [76, 5A303].

^{*37} Freese R.— HLT, p. 397—408.

^{*38} Herrmann Ch.— HLT, p. 119—146.

§ 3. Другие классы решеток

1. *Мультипликативные решетки.* Основные определения можно найти на с. 32 обзора [76, 10A200]. Андерсон [77, 9A450] развивает теорию локализации для некоторого класса модулярных, компактно порожденных мультипликативных решеток, называемых r -решетками. Большая часть результатов касается дистрибутивных r -решеток. Показано, что всякая такая решетка вложима в решетку идеалов коммутативного кольца. Получены условия, необходимые и достаточные для того, чтобы целостная дистрибутивная r -решетка была изоморфна решетке идеалов некоторого коммутативного кольца. Теория локализации для близких к r -решеткам мультипликативных решеток ранее была построена Наккаром [74, 10A293]. Им же были получены условия, при которых локально нетерова решетка является нетеровой [75, 1A358], а также ряд свойств локально нетеровых мультипликативных решеток, обобщающих результаты о локально нетеровых кольцах [72, 1A676, 3A378]. Дж. Джонсон доказал, что в нетеровой решетке каждый элемент примарен тогда и только тогда, когда она локальна и либо нульмерна, либо одномерна и целостна [77, 6A226]. Он показал [73, 11A295] эквивалентность следующих свойств локально нетеровой решетки L с максимальным элементом M : 1) всякий элемент $a \in L$ является главным; 2) M является $\wedge$ -главным элементом; 3) если $a \in L$, $a \neq 0$, то $a = M^n$ при некотором n . Свойства главных элементов нетеровых и локально нетеровых решеток изучались Э. Джонсоном [77, 6A225) и Э. Джонсоном и Ледяевым [73, 8A257].

Детлефсен [75, 4A340] получил характеристики регулярных локально нетеровых решеток, аналогичные характеристики соответствующих колец в терминах редукций максимального идеала. Э. Джонсон и Детлефсен [75, 9A246] ввели понятие простой последовательности, состоящей из главных элементов мультипликативной решетки. В полулокальной нетеровой решетке с некоторыми дополнительными условиями длины всех максимальных простых последовательностей совпадают (что позволяет ввести локальную структуру Маколея) и простые элементы обладают свойствами, аналогичными свойствам простых идеалов в локальных кольцах Коэна — Маколея. Доказано, что мультипликативная подрешетка, порожденная всеми конечными объединениями произведений элементов максимальной простой последовательности, является дистрибутивной регулярной локальной нетеровой решеткой размер-

ности n (здесь n — длина последовательности). Андерсон [76, 11A376] изучал мультипликативную решетку идеалов коммутативной полугруппы с 0 и 1. В частности, он доказал, что любая дистрибутивная локальная нетерова решетка изоморфна такой решетке. Дж. Джонсон показал [76, 8A558], что решетка идеалов m -адического пополнения кольца (определение см. в 70, 8A240) изоморфна как мультипликативная решетка m -адическому пополнению решетки его идеалов. Вопросу о пополнениях модулей над нетеровыми решетками посвящена его работа [76, 1A335]. Андерсон и Э. Джонсон [77, 8A351] ввели и изучили понятие существенно порождаемой локальной нетеровой решетки. Для дистрибутивных нетеровых решеток существенная порождаемость является характеристическим свойством. Дробные элементы мультипликативных решеток рассмотрел Бертон [76, 2A380].

2. *Полные решетки.* Фукс доказал [76, 12A392 и 77, 5A220], что в категории полных решеток и полных гомоморфизмов инъективные объекты тривиальны, и установил некоторые свойства проективных объектов этой категории. В частности, эти объекты не содержат элементов, одновременно $\wedge$ -разложимых и $\vee$ -разложимых. Для проективности цепей это условие является достаточным. Несуществование свободных полных векторных решеток с бесконечным числом образующих установила Якубикова [74, 11A352]. Некоторые категории полных решеток рассматривали Доукер, Страус [77, 9A358] и Уонд [77, 2A379]. Дей [77, 10A345] определил монаду F над категорией множеств G и показал, что категория G^F F -алгебр эквивалентна категории полных решеток (с некоторым дополнительным условием) и изотонных отображений, перестановочных с пересечениями и направленными объединениями. Якубик [73, 11A281] получил условия, необходимые и достаточные для того, чтобы центр полной решетки был ее замкнутой подрешеткой. Он установил также [76, 6A321], что центр полной решетки L является замкнутой подрешеткой, если конгруенции на L перестановочны и удовлетворяют еще некоторому условию.

Аналог общей теории радикалов для полных решеток построили В. А. Андрунакиевич, Ю. М. Рябухин и К. К. Крачилов [76, 8A391, 11A371]. Теоремы о неподвижных точках отображений полных решеток доказали Шмуель [76, 6A322] и Роз [75, 9B461]. В. А. Винокуров [77, 10A190] изучает свойства отображений полных решеток, сохраняющих верхние или нижние грани. Марковский [75, 12A286] рассматривает опре-

деленным образом упорядоченное множество $P(L)$ неразложимых (в объединение или пересечение) элементов полной решетки L . Он показывает, что решетка неразложима в прямое произведение тогда и только тогда, когда множество $P(L)$ связно (как граф), и устанавливает изоморфизм групп автоморфизмов упорядоченных множеств L и $P(L)$.

Свойства некоторых элементов полных решеток изучал Ф. Сас [76, 11A378]. Условия, необходимые и достаточные для сильной вложимости частичного $P\Omega$ -биоператива [69, 12A281] в полную решетку, получил В. В. Розен [74, 11A354]. Если в полном дистрибутивном законе $\bigwedge (\bigvee (a_{ij} \mid j \in J \mid i \in I)) = \bigvee (\bigwedge a_{i\varphi(i)} \mid i \in I \mid \varphi : I \rightarrow J)$ знак равенства заменить знаком $\leq$, то левую и правую части его можно рассматривать как границы интервала полной решетки, называемого d -интервалом. Свойства d -интервалов и связанных с ними двух унарных операций изучал Бандельт ^{*39}. Бизер охарактеризовал полные брауэровы решетки [74, 9A322] в терминах разрешимости системы полиномиальных уравнений. Танниклиф ^{*40} определил пополнение $C(X)$ подмножества X полной решетки L как наименьшую полную подрешетку в L , содержащую X . Он вывел необходимые и достаточные условия, при которых функция $f : X \rightarrow L$ может быть продолжена до полного гомоморфизма $g : C(X) \rightarrow L$ (L предполагается вполне дистрибутивной). О различных типах пополнений имеются работы Бишоп [77, 2A348], Шмида [77, 9A355], Корниша [75, 4A331].

Работы Мартинеца ^{*41} посвящены изучению архимедовых решеток, то есть таких алгебраических решеток, в которых для каждого компактного элемента c пересечение всех максимальных элементов интервала $[0, c]$ равно 0. Название мотивируется тем, что l -группа архимедова тогда и только тогда, когда архимедовой является решетка ее идеалов. Отметим один из результатов: архимедова решетка является брауэровой тогда и только тогда, когда она дистрибутивна. Шмуэль [76, 12A381] получил некоторые свойства множества отображений $A \circ B$ для случая, когда A и B — полные решетки. Подпрямые произведения полных решеток рассматривает Вилле [76, 12A393].

3. Конечные решетки. Интерес к изучению конечных решеток за последние годы значительно увеличился. Исследования

^{*39} Bandelt H.—J. LT, p. 29—43.

^{*40} Tunnicliffe W. R.—J. London Math. Soc., 1974, v. 8, N 2, p. 352—354.

^{*41} Martinez J.—AU, 1973, v. 3, p. 247—260; Martinez J.—HLT, p. 397—408.

конечных дистрибутивных и конечных модулярных решеток отражены в § 1 и § 2. Обзор Вилле^{*42} отражает в основном два направления теории конечных решеток. В одном из них конечные решетки рассматриваются как свободные замыкания частичных решеток (в многообразии всех решеток или в другом многообразии решеток). Одни работы этого направления отражены в обзоре В. И. Игошина, другие — в § 2 (п. 5) и § 4 (п. 3). Второе направление, «арифметическое», касается различных обобщений теоремы Биркгофа о единственности V -представления элементов конечных дистрибутивных решеток. Элемент x конечной решетки L называется поднеприводимым, если $x \neq 0$ и в L найдется такая пара элементов $a > b$, что для любого $y \geq b$, покрываемого элементом x , существуют $c_1, c_2, \dots, c_{2n} \in L$, для которых $(\dots(((x \wedge c_1) \vee c_2) \wedge c_3) \vee c_4) \wedge \dots \wedge c_{2n-1}) \vee c_{2n} = a$, $(\dots(((y \wedge c_1) \vee c_2) \wedge c_3) \vee c_4) \wedge \dots \wedge c_{2n-1}) \vee c_{2n} = b$. Элемент x поднеприводим тогда и только тогда, когда существует гомоморфизм ϕ решетки L на подпрямо неразложимую решетку, удовлетворяющий условию $x = \bigwedge \phi^{-1} \phi x$. Множество поднеприводимых элементов является частичной V -полурешеткой, называемой основанием (scaffolding) решетки L . Для конечной дистрибутивной решетки основание совпадает с множеством V -неразложимых элементов. Любая конечная решетка изоморфна решетке всех идеалов своего основания. «Арифметическое» направление изучает вопросы, связанные с таким представлением конечных решеток, и приложения этой конструкции к теории полиномиальных функций на конечных решетках. Сюда относятся работы Марковского^{*43}, Швайгерта [74, 9A339; 76, 3A240], Вилле [76, 12A393; 77, 12A306], Ривала [77, 9A350], Дорнингера и Визенбауэра [75, 9A257]. Об обратимых полиномиальных функциях на некоторых конечных решетках пишет Швайгерт [76, 9A334].

Вложимость каждой конечной решетки в конечную простую решетку с четырьмя образующими установили Погунтке и Ривал [77, 4A318]. Конечная решетка L называется разборной, если в ней существует такая цепь подрешеток $L_1 \subset L_2 \subset \dots \subset L_n = L$, что $|L_i| = i$ для всех $i = 1, 2, \dots, n$. Ривал [75 5A276] дал ряд условий, эквивалентных разборности решетки, а также доказал, что класс разборных решеток наследственно и гомоморфно замкнут. Результаты статьи Ривала [75, 7A411],

^{*42} Wille R. Aspects of Finite Lattices. Darmstadt, Preprint N 30, 1976.

^{*43} Markowsky G. — HLT, p. 36—68.

а также работ Айтаи [74, 10A290], Дейви и Ривала [76, 8A400], Келли и Ривала [76, 4A289], связанные с характеризацией разборных, планарных и других решеток, отражены в обзоре В. И. Игошина. О графах планарных решеток пишет Платт [77, 4B476]. Исследования Стенли^{*44} связаны со свойствами цепей некоторого класса конечных решеток, названных им суперразрешимыми. Секанина [76, 7A391] показал, что каждая полная адекватная справа (в смысле Исбела, 63, 12A300) подкатегория категории непустых конечных решеток содержит решетки со сколь угодно большим числом элементов. Решетка отношений нормальности конечной решетки изучалась Ниминеном [77, 9A357]. О цепно-антицепно полных конечных решетках и их порядковой размерности имеется работа Леклерка и Монжарде [73, 11A286].

4. *Решетки с различными типами дополнений.* Адамс [73, 9A291] установил наличие дополнений у решетки с 0 и 1, в которой каждый идеал максимален тогда и только тогда, когда он прост, и получил условие, при котором она является булевой. В. Н. Салий [75, 2A346] рассматривал решетки с дополнениями, допускающие гомоморфизм на булеву алгебру, сохраняющий точные грани ортогональных систем элементов и взаимно однозначный в 0 и 1. В другой его работе^{*45} рассматривается категория таких решеток и свойства связанных с ними решеточных преобразований множеств. Корниш [75, 6A419] для 0-дистрибутивных решеток [76, 10A200, с. 35] выясняет связи между наличием квазидополнений и свойствами простых идеалов. Некоторые свойства расширений идеалов в решетках с псевдодополнениями получил Венкатанарасимхан [75, 2A340]. В работе [73, 7A292] он изучает стоуновскую топологию на решетках с псевдодополнениями и квазидополнениями. Оценкам на решетках с ортодополнениями посвящена работа Асиса [74, 9A342].

Дистрибутивные решетки с псевдодополнениями рассматривались в § 1 (п. 3 и 4), а модулярные — в § 2 (п. 4). Для произвольных регулярных двойных p -алгебр Катриняк [75, 4A353] дает характеристику пятерками, подобную характеристике тройками для стоуновых алгебр. Конгруенции p -алгебр и двойных p -алгебр изучались Хехтом и Катриняком [77, 7A300]. О

^{*44} Stanley R. P.—AU, 1972, v. 2, p. 197—217; Stanley R. P. AU, 1974, v. 4, p. 361—371.

^{*45} С а л и й В. Н. — В кн.: Упорядоченные множества и решетки. Саратов, 1977, вып. 4.

связи с p -алгебрами n -значных алгебр Лукасевича без инволюции написана работа Чиньоли [76, 3A74].

Нидерле [76, 5A321] отметил несуществование нетривиальных инъективных объектов в категории решеток с дополнениями и гомоморфизмов, сохраняющих 0 и 1.

§ 4. Общие вопросы

1. Монографии Гретцера [74, 1A286], Кроули и Дилуорса [74, 10A289] посвящены специально теории решеток. Книги Джекобсона [77, 1A153; 76, 1A170] и Петрича [77, 8A203] содержат лишь отдельные главы, посвященные решеткам. Монография Мюллера [76, 8A51] написана на основе курса лекций по теории упорядоченных множеств и решеток и по теории графов. В книге Блиса и Яновича [74, 3A122; 75, 4A206] дается единый подход к решеткам и резидуальным полугруппам на основе использования резидуальных отображений. О ней см. также [76, 10A200, с. 28]. «Элементы теории структур» Л. А. Скорнякова переведены на немецкий язык [74, 4A237].

Отметим также, что в последние годы на основе материалов конференций по универсальной алгебре и теории решеток вышло несколько сборников [74, 11A44, LT, CUA, HLT, ULT]. Большая часть статей содержит полные доказательства публикуемых результатов. Третий выпуск настоящего сборника включает серию обзоров по материалам РЖ «Математика» за 1969 — первую половину 1973 гг. [76, 10A197, 198, 200, 201, 202].

2. *Аксиоматика.* К исследованию аксиоматики решеток и различных конкретных классов решеток (дистрибутивных, модулярных, ортомодулярных, орторешеток) относятся следующие работы: Беран [75, 10A312 и 77, 1A57], Вигандт и Визенбауэр [77, 7A309], Варле [76, 9A331], Колибиар и Марцисова [74, 12A225], Лапшер [74, 12A224], Кларк [74, 7A134], Майстре [74, 8A280], А. И. Зайчик [74, 8A281], Падманабхан ^{*46}, Петку [73, 8A266], Собоцинский [75, 9A70, 72; 77, 3A71, 72], Садкемп [77, 7A290], Тамура [75, 9A71], Шнайдер [74, 1A281].

3. *Свободные решетки и свободные произведения. Другие общие вопросы.* При изучении подрешеток свободных решеток особо важную роль имеют следующие условия: (ω) из $a \wedge b \leq c \vee d$ следует, что $\{a, b, c, d\} \cap [a \wedge b, c \vee d] \neq \emptyset$ (условие Уитмена); $(SD_{\wedge})$ равенство $a \wedge b = a \wedge c$ влечет $a \wedge b = a \wedge (b \vee c)$;

^{*46} Padmanabhan R.—AU, 1971, v. 1, p. 359—361.

(SD_V) условие, дуальное $(SD_{\wedge})$ (условия полудистрибутивности Йонссона); (P) решетки L и $\text{Con}(L)$ имеют одно и то же число V -неприводимых элементов (условие Пудлака-Тумы ^{*47}). Маккензи [74, 1A285] показал, что конечные подрешетки свободных решеток образуют рекурсивный класс и что этот класс состоит из образов свободных решеток при ограниченных эпиморфизмах (то есть таких, что прообраз каждого элемента является интервалом), удовлетворяющих условию (W) . Дей ^{*48} установил, что класс B конечных решеток, являющихся образами свободных решеток при ограниченных гомоморфизмах, является пересечением классов конечных решеток, удовлетворяющих условиям (P) и $(SD_{\wedge})$; отсюда следует, что класс конечных подрешеток свободных решеток является пересечением этих классов и класса конечных решеток, в которых выполняется (W) .

Для любой конечной решетки L и ее интервала I интервальным расширением называется решетка $L[I] = (L \setminus I) \cup U(I \times 2)$, получаемая дублированием каждого элемента из I . Эта конструкция, введенная Деом [71, 6A316], часто используется при изучении свободных решеток. Так, $L \in B$ тогда и только тогда, когда существует такая последовательность решеток $L_0 = 1, L_1, \dots, L_{n+1} = L$ и их интервалов $I_i \subset L_i$, что для всех $i \leq n$ имеет место изоморфизм $L_{i+1} \cong L_i[I_i]$. Класс решеток, удовлетворяющих условию (P) , имеет ряд интересных свойств и характеристик, которые мы не имеем возможности привести ввиду ограниченного объема статьи. Йонссон и Нейшн ^{*49} дали обзор известных фактов о подрешетках свободной решетки, включая теорему Дея (многие из них с новыми доказательствами), и привели некоторые новые результаты. В статье содержатся пять характеристик конечной решетки, являющейся подрешеткой свободной решетки. Для конечно порожденной решетки указаны три таких условия. В частности, приводится результат Гаскила и Платта [76, 8A401]: конечная решетка является подрешеткой свободной решетки тогда и только тогда, когда она точно переводима (см. обзор В. И. Игошина). В связи с этим результатом свойства переводимых решеток оказываются особенно интересными. Отметим работы

^{*47} Pudlák R., Tuma J.—LT, p. 301—341.

^{*48} Day A. Characterization of finite lattices that are bounded homomorphic images of sublattices of free lattices. Lakehead Univ., Math. Rept., 2—77.

^{*49} Jónsson B., Nation J. B.—Contrib. Univ. Alg., Coll. Math. Soc. Janos Bolyai, 17, 1977, p. 223—257.

Гретцера [75, 2A341] и Гаскила, Гретцера и Платта [76, 9A330].

Еще один критерий того, что конечная решетка, удовлетворяющая условиям (W) , $(SD_{\wedge})$, $(SD_{\vee})$, является подрешеткой свободной решетки, можно найти в работе Погунтке и Ривала *⁵⁰. Статья Антониуса и Ривала о характеризуемости полудистрибутивных решеток отражена в обзоре В. И. Игошина. Вилле описал все конечные решетки, свободно порожденные упорядоченным множеством: решетка $FL(P)$ конечна тогда и только тогда, когда P не содержит подмножеств, изоморфных одному из упорядоченных множеств $1+1+1$, $2+2$, $1+4$. Приводится и другая характеристика конечных решеток $FL(P)$. Гретцер и Лаксер [75, 1A355] показали, что при определенных условиях свободное произведение семейства решеток содержит подрешетки, обладающие некоторыми свойствами свободных решеток. Мощности множества образующих в свободном произведении решеток посвящена статья Гретцера и Сихлера [75, 7A409]. В их работе [76, 1A326] доказаны следующие теоремы: 1) для всякого нетривиального многообразия решеток V любые два представления решетки $L \in V$ в виде свободного V -произведения имеют общее продолжение; 2) для любого кардинала n существует 2^n неизоморфных решеток мощности n в V , которые нельзя представить в виде свободного V -произведения свободно V -неразложимых решеток. Свободным произведениям хопфовых решеток посвящена их работа [75, 1A352], а также работа Сихлера [76, 2A378]. Пример нехопфовой решетки с пятью образующими указал Вилле [76, 2A372]. Статья Гретцера *⁵¹ содержит обзор результатов Йонссона, Платта, Лаксера, Сихлера и Гретцера о свободных произведениях решеток. Рассматривается проблема слов, различные аспекты свободного произведения и другие вопросы. Двингер [74, 10A292] выяснял условия, при которых свободное произведение решеток принадлежит классу подпрямых произведений бесконечной цепи.

Для произвольной решетки M , ее простого интервала $[a, b]$ и дистрибутивной решетки D с 0 и 1 Е. Т. Шмидт *⁵² рассматривает частичную решетку $M(aDb) = MUD$, где 0_D отождествляется с a , а 1_D отождествляется с b , и строит расширение M с помощью D — решетку $M[D]$, содержащую $M(aDb)$ в ка-

*⁵⁰ Poguntke W., Rival I. — Ibid., 357—362.

*⁵¹ Grätzer G. — HLT, p. 539—563.

*⁵² Schmidt E. T. — LT, p. 343—353.

честве относительной подрешетки. Изучаются свойства такого расширения.

Работы Ладзянской об упорядоченных суммах решеток отражены в обзоре В. И. Игошина. Об амальгамах упорядоченных множеств и решеток, связанных с конструкцией Гричи [71, 11B949; 73, 12A280], пишет Беран [75, 4A337]. Херрман [73, 11A278] определил сумму S -склеенной системы решеток, то есть такой системы L_x , $x \in S$ (S — упорядоченное множество), в которой $L_x \cap L_y$ является фильтром в L_x и идеалом в L_y , если $x \leq y$ и $L_x \cap L_y \neq \emptyset$. В определение S -склеенной системы входят еще некоторые естественные условия. Основным результатом касается модулярных решеток. Еще одну «сумму» системы решеток исследует Грачиньская [76, 3A338; 76, 7A382]. Плонка и Погунтке [77, 12A328] и Колема-Хартман [77, 12A329] изучают T -независимость подмножеств решетки, близкую к независимости в смысле Марчевского. Основные результаты получены для дистрибутивного случая.

Секанина [76, 7A391] показал, что полная подкатегория категории решеток адекватна слева в смысле Исбела [63, 12A300] тогда и только тогда, когда она содержит по крайней мере одну решетку, ретрактом которой является четырехэлементная булева алгебра. На основании рассмотрения класса всех объектов категории решеток L , являющихся прямыми (обратными) пределами индуктивных (проективных) систем с объектами из класса решеток H , Платт [75, 6A445] вводит понятие индуктивного (проективного) ранга класса H и доказывает, что для любых ординалов α и β существует такой класс решеток, у которого индуктивный ранг равен α , а проективный — β .

4. *Подрешетки.* Понятие стандартной подрешетки обобщает понятие стандартного идеала. Отметим одно из свойств стандартных подрешеток, установленных Фридом и Е. Т. Шмидтом [76, 12A391]: если все выпуклые подрешетки, содержащие данный элемент, стандартны, то решетка дистрибутивна. В работе Ко^{*53} доказаны следующие теоремы о решетке $CS(L)$ выпуклых подрешеток решетки L : 1) $CS(L)$ является атомной алгебраической решеткой; 2) для конечной решетки L решетка $CS(L)$ полумодулярна снизу тогда и только тогда, когда L — цепь; 3) для решетки, удовлетворяющей обоим условиям обрыва цепей, $CS(L)$ обладает относительными дополнениями тогда и только тогда, когда L обладает относительны-

^{*53} Koh K. M. — Nanta Math., 1972, v. 5, N 3, p. 18—37.

ми дополнениями. Изучаются другие свойства решетки $CS(L)$. Для конечных решеток эти исследования продолжены в работе Чена и Ко *⁵⁴ и в статье Ко *⁵⁵. О влиянии изоморфизма решеток подрешеток двух решеток на свойства этих решеток есть заметка Ривала *⁵⁶.

Шик [74, 4A233], Рахунек [74, 4A240] и Ладзянска [74, 8A288] приводят различные условия, при которых подрешетка, порожденная тремя элементами, модулярна или дистрибутивна.

Пасини [75, 2A369] описывает решетки с пустыми подрешетками Фраттини и решает проблему Ко [72, 1A504]: строит такую решетку L , что $L \cong \Phi(L)$. Сабо [77, 4A310] занимается вопросами продолжения непрерывных функционалов, заданных на подрешетках. О подрешетках прямого произведения пишет Топкис [77, 7A292]. Работа Якубика о подрешетках с насыщенными цепями отражена в обзоре В. И. Игошина (характеризуемость).

5. *Разные вопросы.* Вилле *⁵⁷ описывает в терминах характеризованности (см. обзор В. И. Игошина) все такие конечные упорядоченные множества, для которых существует лишь конечное число простых решеток, порожденных их гомоморфными образами. Беран [74, 2A294] дает простое доказательство того, что всякая решетка вложима в простую решетку — решетку эквивалентностей на некотором множестве. Ривал [75, 5A276] показал, что в каждой решетке L конечной длины выполняется неравенство $|L| \geq 2(l(L) + 1) - |\text{Irr}(L)|$, где $l(L)$ длина решетки, а $\text{Irr}(L)$ — множество ее дважды неразложимых элементов. Этот результат связан с изучением разборных решеток. Достаточное условие для простоты произвольной антидистрибутивной решетки конечной размерности получил Смит [75, 2A349].

О некоторых конгруенциях и идеалах решетки, связанных с теорией полиномиальных функций, написана работа Матти-сена *⁵⁸. Швайгерт [75, 9A245] доказал, что полугруппа полиномиальных функций на решетке L идемпотентна тогда и только тогда, когда L дистрибутивна. Словесной длиной полинома $p(x)$ в решетке L называют наименьшую из длин слов, пред-

*⁵⁴ Chen C. C., Koh K. M.—Nanta Math., 1972, v. 5, N 3, p. 95—97.

*⁵⁵ Koh K. M.—Nanta Math., 1973, v. 6, N 1, p. 68—79.

*⁵⁶ Rival I.—AU, 1972, v. 2, p. 395.

*⁵⁷ Wille R.—LT, p. 455—462.

*⁵⁸ Matthiessen G.—Contrib. Univ. Alg., Coll. Math. Soc. Janos Bolyai, 17, 1977, p. 295—310.

ставляющих $p(x)$ в L , а словесной длиной решетки L — наибольшую из словесных длин всевозможных полиномов от одной переменной в L . Дорнингер показал, что некоторые классы решеток (в частности дистрибутивные решетки) характеризуются словесной длиной [74, 1A283]. Некоторые типы действительностнозначных функций на решетках, связанные с оценками, изучали Макдиармид [77, 1A281] и Гримонпре и Ван Дори [77, 12A308]. Свойства оценок σ -непрерывных решеток исследовал Кранц [77, 4A313].

Некоторое свойство идеалов локально выпуклой решетки отмечено Лотцем [75, 4A330]. Радикалом идеала решетки с 0 С. Л. Эдельман называет пересечение всех содержащих его простых идеалов [74, 10A291]. Он вводит понятие радикально-простого идеала и доказывает, что неприводимое разложение идеала в пересечение радикально — простых идеалов определяется однозначно с точностью до нумерации компонент. Конгруенции и идеалы в решетке (n, n) -матриц над решеткой изучают Бевис и Мартин ^{*59}.

Теппати [77, 7A311] исследует условия, при которых эквивалентность на универсальной алгебре является конгруенцией, и полученные результаты рассматриваются для решеток с нулем. Хайда, Нидерле и Зелинка [76, 12A403] доказывают, что на решетке с относительными дополнениями любая согласованная с операциями толерантность является конгруенцией. Указывается класс решеток, у которых существуют такие толерантности, не являющиеся конгруенциями. Зелинка [75, 12A295] показывает, что на решетке, имеющей более двух элементов, можно определить две толерантности, одна из которых $\vee$ -стабильна, другая $\wedge$ -стабильна, но ни одна из них не стабильна относительно обеих операций. Изучению дериваций решетки (которые являются некоторым обобщением $\wedge$ -трансляций) посвящены работы Г. Саса [76, 4A275] и Ниминена [77, 7A291].

Решетка L называется однородной, если для любых $a, b \in L, a \leq b$, существует такой ее автоморфизм f , что $f(a) = b$ и $x \leq f(x)$ для всех $x \in L$. Всякая l -группа однородна как решетка [Двингер, 74, 10A292]. Берман [75, 7A328; 76, 7A365] изучает свойства однородных решеток и приводит пример однородной решетки, которая не допускает структуру l -группы. Изящное доказательство самодуальности класса дезарговых решеток

^{*59} Bevis J. H., Martin C. K. — J. Natur. Sci. and Math., 1972, v. 12, p. 151—158.

предложил Йонссон ^{*60}. Кертес и Штерн [75, 3A361] продолжали изучение так называемых A -решеток. Отмечается их связь с матроидными решетками Маеды. Свойства иерархических решеток, то есть конечных решеток с 0 и 1, в которых каждый собственный элемент покрывается точно одним элементом, рассматривал Салес [74, 6A387].

Якубик [76, 1A337] доказывает, что если неориентированные графы дискретных решеток L и L' изоморфны, то $L \cong A \times B$, $L' \cong A' \times B$, где A' — решетка, дуальная к A [ср. с его работой 77, 1A288]. О графах, связанных с решетками, есть также работы Зелинки [74, 2B495; 76, 5B557].

Леклерк [74, 7A414], используя отличное от общепринятого определение интервала, вводит тернарное отношение «между» на решетке, изучает его свойства и отмечает возможность приложений в теории графов. Об отношении нормальности, обобщающем нормальность Дина и Крузе [69, 11A256], написана работа Берана [76, 7A336]. Норонья и Алмейда [73, 8A260] рассматривают бинарное отношение η , включающее в себя порядок, и изучают вопросы, связанные с существованием композиционных η -последовательностей и теоремой Жордана—Гельдера. Для модулярных решеток это делается в их работе [74, 7A420]. Мощность некоторых решеток рассматривает Хосоно [75, 9A55]. Приложениям теории решеток к физике посвящены работы Хинтермана, Грубера [77, 2A290] и Векаша, Абрамовичи [74, 8A282]. Популярную статью о прямых произведениях решеток написал Фолкенборн [76, 4A27].

В. И. ИГОШИН

МНОГООБРАЗИЯ И КВАЗИМНОГООБРАЗИЯ РЕШЕТОК

Результаты работ по данной тематике, отраженных в РЖ «Математика» за 1969 — первую половину 1973 гг., содержатся в обзоре Т. С. Фофановой и автора [76, 10A197]. Настоящий обзор является его продолжением.

1. Многообразие

Многообразие решеток. Падманабхан ^{*1} привел два тождества, каждое из которых содержит три переменных и определяет многообразие всех решеток. С. Тамура [75, 9A71] для некоторых многообразий решеток (в том числе и для многооб-

^{*60} Jónsson B.—AU, 1972, v. 2, p. 396.

^{*1} Padmanabhan R.—AU, 1971, v. 1, p. 359—361.

разия всех решеток) построил системы аксиом из двух и из трех тождеств. Босбах [76, 4A274] передоказал результат Маккензи [71, 11A318] об определяемости многообразия всех решеток одним тождеством, а Херрман *² — его же результат о конечной базисуемости эквациональной теории конечной решетки. Комер и Хонг [73, 10A264] доказали утверждение Шютценберже *³ об эквациональном базисе для многообразия $\vee N_5$, порожденного пятиэлементной немодулярной решеткой N_5 . Маккензи [74, 1A285] нашел другое тождество, задающее $\vee N_5$. Йонссон [75, 7A410] привел пример двух конечно базисуемых многообразий решеток, решеточное объединение которых является многообразием, не имеющим конечного базиса тождеств, и указал достаточное условие для конечной базисуемости объединения двух конечно базисуемых многообразий решеток. Херрман и Погунтке *⁴ установили, что многообразие, порожденное решетками конгруэнций многообразия групп, содержащего все абелевы группы, не конечно базисуемо. И. С. Негру *⁵ указал многообразие решеток, которое содержит все модулярные решетки и которому принадлежит бесконечная решетка с тремя образующими, рассматривавшаяся им в [75, 3A108]. Причем на этой решетке выполняется тождество более сильное, чем то, которое определяет исходное многообразие, и верное уже не на всякой модулярной решетке.

Рассматривая многообразия n -дистрибутивных решеток, то есть многообразия D_n решеток, определяемые тождествами

$$x \wedge \bigvee_{i=0}^n y_i = \bigvee_{j=0}^n \left(x \wedge \bigvee_{i=0, i \neq j}^n y_i \right), \quad \text{Хун}^{*6}, [76, 8A403] \text{ приводит но-}$$

вые примеры многообразий решеток, не имеющих конечного базиса тождеств, и многообразий решеток, не порождаемых своими конечными членами, новое доказательство существования континуума различных многообразий решеток, а также доказывает, что D_n ($n \geq 2$) имеет бесконечно много покрывающих элементов в решетке всех многообразий решеток. Фриз [77, 10A189] показывает, что многообразие M_n^∞ конечно ба-

*² Herrmann Ch.—AU, 1973, v. 3, p. 51—58.

*³ Schützenberger M. P.—C. r. Acad. Sci. Paris, 1945, v. 221, p. 218—220.

*⁴ Herrmann Ch., Poguntke W.—AU, 1974, v. 4, p. 280—286.

*⁵ Негру И. С. — 14-я Всесоюзн. алг. конф. (Тезисы докл.). Новосибирск, 1977, ч. 2, с. 111.

*⁶ Huhn A.—Contrib. Univ. Alg., Coll. Math. Soc. Janos Bolyai, 17, 1977, p. 167—178.

зируемо и содержит континуум подмногообразий. Вилле [74, 7A422] устанавливает, что для любого $n: 4 \leq n < \infty$ многообразие M_n^∞ порождается своими конечными членами и все свободные в нем решетки с конечным числом образующих конечны. Фриз ^{*7} доказывает, что многообразие, порожденное всеми модулярными решетками ширины $\leq n$ ($2 \leq n < \infty$), не порождается своими конечномерными членами, а Шмидт [77, 3A260], — что такое многообразие при $n=2$ не порождается и своими членами, обладающими свойством субпроективности. Вопрос о порождаемости многообразий решеток рассматривают Дилуорс и Фриз ^{*8}.

Маккензи [74, 1A285] называет пару $\langle H, \Theta \rangle$ эквациональных решеточных теорий расщеплением решетки T_1 всех эквациональных решеточных теорий, если для любой теории $K \in T_1$ имеет место точно одно из неравенств $K \leq \Theta$ и $K \geq H$. Он доказывает, что всякое расщепление имеет вид $\langle \Theta_1[\varepsilon], \Theta L \rangle$ для некоторого решеточного тождества ε и подпрямо неразложимой решетки L (здесь ΘL — эквациональная теория решетки L). В этом случае решетка L называется расщепляющей. Приводится описание расщепляющих решеток и алгоритм построения по расщепляющей решетке тождества ε , дающего расщепление $\langle \Theta_1[\varepsilon], \Theta L \rangle$. Дей ^{*9} положительно решил проблему 6 Маккензи [74, 1A285], доказав, что совокупность всех расщепляющих решеток порождает многообразие всех решеток. Зайберт ^{*10} показал, что n -атомные $(n+2)$ -элементные решетки M_n ($n \geq 4$) не являются расщепляющими в многообразии всех модулярных решеток.

Бейкер [75, 4A332], обобщая результаты своей предыдущей статьи [71, 7A344], разработал общий метод отыскания тождеств, описывающих наименьшее многообразие, содержащее класс алгебр, задаваемый дизъюнкцией тождеств, и применил его для эквационального описания некоторых классов дистрибутивных решеток, арифметических колец, алгебр Буля, Поста, Гейтинга (см. также его работу [77, 8A49]). Маккаи ^{*11} передоказал результат Бейкера [77, 12A327] о конечной базируемости многообразия, порожденного конечной алгеброй из многообразия конечного типа с дистрибутивными решетками конгруэнций.

^{*7} Freese R.— Ibid., p. 133—144.

^{*8} Dilworth R. P., Freese R.— AU, 1976, v. 6, p. 263—267.

^{*9} Day A.— AU, 1977, v. 7, p. 163—169.

^{*10} Seibert W.— LT, p. 355—378.

^{*11} Makkai M.— AU, 1973, v. 3, p. 174—181.

Гретцер, Йонссон и Лаксер [74, 2A290] доказали, что всякое многообразие модулярных решеток, содержащее недистрибутивную решетку, не обладает свойством амальгамирования, и что амальгама многообразия модулярных решеток не содержит нетривиальных дистрибутивных решеток. Йонссон и Олин [77, 12A304] показали, что элементарная эквивалентность не сохраняется свободными произведениями в недистрибутивных многообразиях решеток. Гаскил [73, 12A306] изучает взаимосвязь между многообразиями решеток и некоторыми классами полурешеток. В. И. Игошин [74, 9A340] рассматривает свойство шрейеровости для многообразий решеток.

В препринте Йонссона ^{*12} приведен обширный список проблем и подробные комментарии к ним о многообразиях решеток, а на Международном конгрессе математиков в Ванкувере Йонссон [76, 9A343] дал обзор результатов и проблем о многообразиях, порожденных решетками конгруэнций алгебр из некоторого многообразия. Результаты этого направления отражены в обзоре Г. И. Житомирского.

Многообразие алгебр, близких к решеткам. Фрид [76, 4A284] построил многообразие слабо ассоциативных решеток, не содержащее ни одного из известных четырех многообразий слабо ассоциативных решеток, покрывающих многообразие дистрибутивных решеток. Катриняк в [74, 3A228] устанавливает изоморфизм решетки всех многообразий модулярных решеток и решетки всех многообразий модулярных S -алгебр, удовлетворяющих некоторому дополнительному тождеству (S -алгебра — это решетка с псевдодополнениями, удовлетворяющая тождеству $x^* \vee x^{**} = 1$). Отсюда, в связи с результатом Бейкера [69, 10A149], Катриняк ^{*13} выводит существование континуума различных многообразий модулярных S -алгебр, чем положительно решает проблему 65 из книги Гретцера [74, 1A286] о существовании континуума многообразий решеток с псевдодополнениями. Кроме того, в работе [74, 3A228] Катриняк описывает некоторые многообразия S -алгебр, в работе [75, 5A300] он отмечает, что существует континуум различных многообразий модулярных решеток с псевдодополнениями, а в работе [74, 11A363] — описывает решетку всех подмногообразий одного из многообразий модулярных решеток с псевдодополнениями. Брунс [77, 5A214] доказывает, что

^{*12} Jónsson B.—Varieties of lattices: some open problems. Preprint, 1978.

^{*13} Katrinák T.—AU, 1973, v. 3, p. 328—329.

многообразие всех орторешеток порождается своими конечными алгебрами, но это неверно для многообразия всех модулярных орторешеток. Собоциньски [75, 9A72] приводит независимую систему из четырех аксиом для многообразия орторешеток. Блок [77, 12A323] строит континуум многообразий гейтинговых алгебр, не порождаемых своими конечными членами. И. В. Витенько и В. В. Николенко [74, 11A362] находят критерий принадлежности конечной псевдобулевой алгебры некоторому многообразию псевдобулевых алгебр. Различные многообразия алгебр, близких к решеткам, изучаются в работах Нимитца и Уэйли [74, 1A284], Блока и Двингера [75, 12A291], Магари [76, 11A115], Франчи [76, 4A282], Бриньоле [75, 12A305], Тейлора [76, 10A207], Варле [75, 5A301], Дея^{*14}.

Свойства алгебр в многообразиях. Нейшн [77, 1A284] приводит пример конечной частичной решетки, которая в определенном им смысле удовлетворяет каждому тождеству многообразия всех модулярных решеток, но которая не может быть расширена до модулярной решетки. Хун [76, 2A375] строит семейство решеток, конечно представимых в многообразии модулярных решеток и обладающих бесконечными группами автоморфизмов. Славик [74, 9A325] указал счетную совокупность многообразий решеток, каждое из которых вместе со всякой решеткой L содержит и все такие решетки, решетки подрешеток которых изоморфны решетке подрешеток L . Херрман, Киндерман и Вилле [76, 12A388] получили полное описание подпрямо неразложимых модулярных решеток, порожденных упорядоченным множеством $1+2+2$, в многообразии, порожденном всеми модулярными решетками с дополнениями, и в многообразии, порожденном решетками нормальных подгрупп групп. Лаксер [73, 11A293] описал все такие многообразия дистрибутивных решеток с псевдодополнениями, на всех алгебрах которых совокупность главных конгруэнций замкнута относительно пересечения. Это в точности подмногообразие многообразия стоуновых алгебр.

2. Квазимногообразие и предмногообразие

В [74, 11A355] В. И. Игошин доказал (другое доказательство см. у Гретцера и Лаксера [78, 7A415]), что всякое подквазимногообразие многообразия $\mathcal{M}_n$, порожденного n -атомной решеткой M_n высоты два, $n = 4, 5, \dots$, является многообразием, а в работе [78, 2A261] им же показано, что совокупностью

^{*14} D a y A.— Varieties of Heyting algebras, Preprint.

$\cup M_n$, $n=1, 2, \dots, \omega$, исчерпываются все многообразия модулярных решеток, обладающие таким свойством. Славик [75, 11A390] привел другие примеры многообразий решеток с указанным свойством.

Вронски [77, 5A215, 11A327] и Адамс [77, 2A358] доказали континуальность совокупности соответственно квазимногообразий и импликационных классов (то есть классов, замкнутых относительно I, S, P) дистрибутивных решеток с псевдодополнениями.

В. П. Белкин [78, 2A277] привел пример конечной решетки, не имеющей конечного базиса квазитождеств. А. И. Циткин установил конечную базируемость и непорождаемость своими конечными алгебрами квазимногообразия, порожденного свободной псевдобулевой алгеброй с одним свободным образующим [76, 7A370], и конечную базируемость квазимногообразия, порожденного конечным набором геделевых алгебр [76, 9A324]. И. С. Негру [75, 3A108], А. И. Будкин и В. А. Горбунов [75, 12A308] показали, что квазимногообразие, порожденное всеми конечными решетками, совпадает с многообразием всех решеток.

В [76, 5A295] В. Б. Лендер доказывает, что совокупность нетривиальных предмногообразий, состоящих только из модулярных решеток, порождает свободный группоид группоид предмногообразий решеток и служит в нем системой свободных образующих, а в [77, 10A193] —, что в группоиде предмногообразий решеток существуют предмногообразия, не являющиеся вполне разложимыми, и что совокупность таких предмногообразий не образует множества (см. также его работы о предмногообразиях решеток [75, 3A372], [76, 7A372, 8A416]). Дей^{*15} дает положительный ответ на вопрос Л. Н. Шеврина: верно ли, что многообразие всех решеток и тривиальное многообразие суть единственные многообразия решеток, идемпотентные относительно мальцевского умножения?

3. Свобода^{*16}, проективность, инъективность

Маккензи [74, 1A285] показал, что конечные подрешетки свободных решеток образуют рекурсивный класс, и что этот класс состоит из ограниченных эпиморфных образов свобод-

^{*15} Day A.— Idempotents in the groupoid of all SP classes of lattices. Preprint.

^{*16} О свободных решетках см. также обзор Т. С. Фофановой в настоящем сборнике (§ 4, п. 3).

ных решеток, удовлетворяющих условию Уитмена (W): если $a \wedge b \leq c \vee d$, то $a \leq c \vee d$, или $b \leq c \vee d$, или $a \wedge b \leq c$, или $a \wedge b \leq d$. Решетка L называется точно переводимой, если для каждого вложения φ решетки L в решетку $I(L^*)$ всех идеалов решетки L^* существует такое вложение $\psi: L \rightarrow L^*$, что $x \leq y \leftrightarrow \psi(x) \in \varphi(y)$. Гаскил, Гретцер, Платт [76, 9A330] дали обзор известных фактов о переводимых решетках и критерий точной переводимости конечной решетки. Используя последний, Гаскил и Платт [76, 8A401] доказали, что конечная решетка точно переводима тогда и только тогда, когда она вложима в свободную решетку. Фриз [77, 1A285] показал, что если конечная плоская (планарная) [76, 4A289] модулярная решетка не имеет подрешетки, изоморфной четырехатомной шестиэлементной решетке, то она вкладывается в $FM(4)$. Погунтке и Ривал^{*17} доказали следующую теорему: если L -конечная полудистрибутивная решетка (то есть удовлетворяющая квазитождеству $x \vee y = x \vee z \rightarrow x \vee y = x \vee (y \wedge z)$ и двойственному квазитождеству), в которой выполняется условие Уитмена (W), элементы $a, b \in L$ таковы, что $L \setminus (a, b)$ является подрешеткой L , и если решетки $L \setminus (a, b)$ и $[a, b]$ суть подрешетки свободной решетки, то L также является подрешеткой свободной решетки. обстоятельный обзор результатов и проблем о подрешетках свободной решетки дали Йонссон и Нейшн^{*18}.

Херрман [77, 9A359] изучает модулярную решетку, свободно порожденную элементами a, b, c, d , удовлетворяющими соотношениям: $a \vee d = b \vee c = 1$ и $a \wedge d = b \wedge c = 0$. Вилле^{*19} дает описание всех конечных решеток, свободно порожденных упорядоченными множествами. В [73, 11A284] им были описаны конечные модулярные решетки, свободно порожденные упорядоченными множествами. Все такие решетки, в частности, являются подпрямыми произведениями двухэлементных цепей и трехатомных пятиэлементных решеток. В работе [76, 12A393] Вилле охарактеризовал дистрибутивную решетку, свободную над конечным упорядоченным множеством, и построил диаграмму 99-элементной свободной в многообразии, порожденном пятиэлементной немодулярной решеткой, решетки с тремя образующими (впервые открытой с помощью ЭВМ Уотерманом [70, 10A195]). Шик [74, 4A233] описывает свободную ре-

^{*17} Poguntke W., Rival I.—Contrib. Univ. Alg., Coll. Math. Soc. Janos Bolyai, 17, 1977, p. 357—362.

^{*18} Jónsson B., Nation J. B.—Contrib. Univ. Alg., Coll. Math. Soc. Janos Bolyai, 17, 1977, p. 223—258.

^{*19} Wille R.—Ibid., p. 581—594.

шетку с тремя порождающими и определяющим соотношением $(a \wedge b) \vee (b \wedge c) \vee (c \wedge a) = (a \vee b) \wedge (b \vee c) \wedge (c \vee a)$. Она содержит 24 элемента. И. М. Гельфанд и В. А. Пономарев [74, 10A298; 75, 6A418; 77, 3A259] для модулярных решеток вводят и изучают понятия и конструкции, связанные с их гомоморфизмами (представлениями), в решетки подпространств конечномерных векторных пространств. Различные свободные модулярные решетки изучаются в работах Митчке и Вилле *²⁰, Дея, Херрмана и Вилле *²¹, Вилле *²². Эванс и Хонг *²³ доказывают, что свободная модулярная решетка с четырьмя образующими не является конечно определенной. Херрман *²⁴ строит контрпример к утверждению М. М. Глухова [65, 10A278] о вложении модулярного структуроида в модулярную решетку.

Для свободной дистрибутивной решетки Клейтман и Марковски [76, 8A402] получили оценку числа элементов, Монжарде [76, 2A376] описал множество медианных элементов, Адамс и Келли [76, 2A371] показали, что у всякой свободной дистрибутивной решетки более чем с тремя порождающими существуют гомоморфные образы, не являющиеся ее подрешетками. Берман *²⁵ доказал, что интервалы свободной решетки любого многообразия решеток содержат подрешетки, изоморфные свободным в этом многообразии решеткам.

Ладзянска [75, 4A334, 6A425] вводит и изучает понятие порядковой суммы решеток в произвольном многообразии решеток, обобщая соответствующие понятия и результаты Бэлбса и Хорна [68, 8A269], Гретцера и Лаксера [70, 10A207], теорему Ю. И. Соркина об изотонном отображении. Дейви [77, 5A213] описывает свободные произведения, инъективные и свободные объекты в многообразиях брауэровых и гейтинговых алгебр (см. также работу Кёлера [76, 4A298]). Адамс и Сихлер [77, 7A293] распространили на произвольное многообразие решеток результаты Гретцера и Сихлера [75, 1A352] о свободном произведении хопфовых решеток. В частности, каждое нетривиальное многообразие решеток V содержит две хопфовы решетки, V -свободное произведение которых уже не будет хопфовым. Гретцер и Лаксер [75, 1A355] изучали подрешетки свободных произведений решеток, удовлетворяющие некоторым

*²⁰ Mitschke A., Wille R.— HLT, p. 383—397.

*²¹ Day A., Herrmann Ch., Wille R.— AU, 1972, v. 2, p. 317—323.

*²² Wille R.— AU, 1973, v. 3, p. 131—138.

*²³ Evans T., Hong D. Y. — AU, 1972, v. 2, p. 284—285.

*²⁴ Herrmann Ch.— AU, 1975, v. 5, p. 447.

*²⁵ Berman J.— AU, 1972, v. 2, p. 174—176.

свойствам свободных решеток. Йонссон ^{*26} рассматривал свойства свободных произведений в различных многообразиях решеток. Куэйкенбуш ^{*27} описал строение свободных произведений двух решеток в классе всех дистрибутивных решеток с 0 и 1. Обзор результатов о свободных произведениях решеток имеется в работе Гретцера ^{*28}.

Херрман и Хун [76, 6A314] доказали разрешимость проблемы тождества слов в свободных решетках подмодулей, Магари [74, 8A289] — в импликативных полурешетках, а Брунс [77, 5A214] — в орторешетках. Кроме того, Брунс показал, что свободная орторешетка с двумя образующими содержит в качестве подалгебры свободную орторешетку со счетным числом образующих и в качестве подрешетки — свободную решетку со счетным числом образующих. Свободные решетки в категории, оказавшейся многообразием, $\wedge$ -непрерывных решеток изучает Исбел [76, 8A398], а в многообразии дистрибутивных решеток с псевдодополнениями — Берман и Двингер [76, 1A336] и Уркхарт ^{*29}. Ландолт и Уэйли [77, 1A291] дают описание свободной импликативной полурешетки с тремя образующими. Гайсзингер [73, 12A311] устанавливает двойственность категории конечных дистрибутивных решеток с $(0, 1)$ -гомоморфизмами и категории конечных упорядоченных множеств с изотонными отображениями, выводя отсюда известное описание конечных проективных дистрибутивных решеток, а также построение свободной дистрибутивной решетки на упорядоченном множестве.

Джонс [75, 6A424] изучает свойства полурешетки с псевдодополнениями, свободно порожденной некоторым подмножеством, приводит критерий проективности конечной полурешетки с псевдодополнениями и указывает способ получения всех таких полурешеток с псевдодополнениями. Лаксер [76, 11A372] доказывает, что всякая конечная проективная в многообразии V решетка точно V -переводима, и отмечает, что обратное утверждение в многообразии дистрибутивных решеток не выполняется, хотя, как показали Гаскил и Платт [76, 8A401], оно имеет место в многообразии всех решеток. Митчке и Вилле [77, 12A305] показывают, что конечная дистрибутивная решетка проективна в многообразии всех модулярных решеток тогда и только тогда, когда упорядоченное множество V -не-

^{*26} Jónsson B.—AU, 1971, v. 1, p. 362—373.

^{*27} Quackenbush R. W. — AU, 1972, v. 2, p. 393—394.

^{*28} Grätzer G.—HLT, p. 539—563.

^{*29} Urquhart A.—AU, 1973, v. 3, p. 13—15.

разложимых элементов этой решетки замкнуто относительно пересечений и не содержит корон. Бэлбс и Хорн [77, 12A302] дают критерий существования проективного покрытия (понятие, двойственное понятию инъективной оболочки) для счетной дистрибутивной решетки и рассматривают вопросы, связанные с проективными покрытиями прямых и свободных произведений и порядковых сумм дистрибутивных решеток. Дистрибутивные решетки с конечными проективными покрытиями в классах всех решеток, всех конечных решеток и всех дистрибутивных решеток изучают Дей, Гаскил и Погунтке ^{*30}. Алгебра A из многообразия V называется конечно проективной, если для всякой алгебры B из V и всякого гомоморфного наложения $f: B \rightarrow A$ существует конечная подалгебра B , образ которой при f совпадает с A . Дей [76, 11A386] находит критерий конечной проективности алгебры и примеры конечно проективных решеток и близких к ним алгебр. Митчке, Шмидт и Вилле ^{*31} описывают модулярные решетки ширины два, конечно проективные в многообразии всех модулярных решеток, и дают необходимое условие конечной проективности решетки в многообразии всех модулярных решеток. Шмидт ^{*32} приводит другие необходимые условия конечной проективности решетки в многообразии модулярных решеток. Каган и Куэйкенбуш [77, 9A370] описывают свободные, проективные и инъективные алгебры в каждом многообразии монадических алгебр. Бизер [76, 11A390] приводит новое простое доказательство теоремы Катриняка ^{*33}, характеризующей инъективные двойные алгебры Стоуна.

4. Характеризуемость (невложимость)

Многие классы решеток (среди них некоторые многообразия и квазимногообразия) могут быть описаны следующим образом. Решетка принадлежит определяемому классу тогда и только тогда, когда в неё не вкладывается ни одна решетка из фиксированного набора решеток. Такие классы называются характеризуемыми (соответствующим набором решеток). Общая теория характеризуемых классов строится в работе В. И. Игошина [75, 2A366]. В [75, 5A291] он показывает, что много-

^{*30} Day A., Gaskill H., Poguntke W. Distributive lattices with finite projective covers. Lakehead Univ., Math. Report.. 3—77.

^{*31} Mitschke A., Schmidt E. T., Wille R.—On finitely projected modular lattices of breadth two. Preprint.

^{*32} Schmidt E. T.—Remarks on finitely projected modular lattices. Preprint.

^{*33} Katrinák T.—AU, 1974, v. 4, p. 259—267.

образии, порожденное решетками подпространств папповых проективных плоскостей, не характеризуемо в многообразии всех решеток. В работах А. И. Будкина и В. А. Горбунова [75, 12A308], В. П. Белкина и В. А. Горбунова [76, 5A315], В. П. Белкина [76, 12A379], В. А. Горбунова [77, 8A358], В. И. Игошина [75, 12A307], [78, 2A261, 262] понятие характеризуемости применяется к изучению решеток квазимногообразий и решеток многообразий различных алгебраических систем. Об этих работах пишет В. А. Артамонов (см. настоящий сборник). В [75, 1A359] Ежек и Славик приводят примеры примитивных решеток, то есть таких конечных решеток, что характеризуемые ими классы являются многообразиями, а в другой своей работе ^{*34} полностью описывают все такие решетки. В [74, 8A290] В. И. Игошин называет подкласс K класса K_0 алгебраических систем конечной сигнатуры h -характеризуемым в K_0 , если K состоит из всех тех систем из K_0 , которые не имеют подсистем, гомоморфно отображающихся на системы из некоторой совокупности конечных систем из K_0 . Там же устанавливаются общие свойства таких классов и доказывается h -характеризуемость многообразия, порожденного всеми решетками высоты два, в многообразии всех модулярных решеток. Славик [76, 5A296] изучает h -примитивные решетки, то есть такие конечные решетки, что h -характеризуемые ими классы являются многообразиями. В частности, он доказывает, что конечная решетка h -примитивна тогда и только тогда, когда она расщепляющая (в смысле [74, 1A285]).

Якубик в [76, 5A302] вводит связанное с идеей характеризуемости понятие s -характеризуемого класса решеток и доказывает, что классы модулярных решеток локально конечной длины и дистрибутивных решеток локально конечной длины s -характеризуются в классе всех решеток локально конечной длины, а в [76, 4A276] он доказывает, что никакое нетривиальное многообразие модулярных решеток не s -характеризуется в многообразии всех решеток.

Шмидт [76, 1A329] вводит понятие слабой подрешетки решетки и указывает условие, которому должна удовлетворять конечная слабая подрешетка, чтобы класс всех решеток из некоторого многообразия, не содержащих данной слабой подрешетки, был многообразием. Келли и Ривал [76, 4A289] доказали, что плоские (планарные) решетки — это в точности все те решетки, которые не содержат в качестве подрешетки ни одну из двенадцати указанных ими конечных решеток. Они

^{*34} Jezek J., Slavik V.— Primitive lattices. Preprint.

же в работе [75, 7A411] показали, что конечная решетка является разборной (см. обзор Т. С. Фофановой, с. 49) тогда и только тогда, когда она не содержит корон в качестве упорядоченных подмножеств, а модулярная решетка конечной длины разборна в том и только в том случае, если она не содержит шестиэлементных корон в качестве упорядоченных подмножеств. Айтаи [74, 10A290] доказал, что класс (конечных) разборных решеток характеризуется в классе всех конечных решеток счетным набором конечных решеток. Антониус и Ривал ^{*35} установили характеризуемость двумя конечными решетками класса решеток, удовлетворяющих условию Уитмена (W) (см. предыдущий пункт), в классе всех конечных полудистрибутивных решеток. Дейви, Погунтке и Ривал [76, 2A384] доказали, что класс полудистрибутивных решеток конечной длины характеризуется в классе всех решеток конечной длины шестью указанными ими конечными решетками. Характеризуемость каждого из многообразий D_n n -дистрибутивных решеток (определение см. в первой части пункта 1) в наименьшем многообразии, содержащем D_n и многообразие, порожденное решеткой подпространств проективной геометрии над полем нулевой или простой характеристики, доказал Хун ^{*36}.

Дейви и Ривал [76, 8A400] показали, что всякая решетка, порожденная тремя попарно не сравнимыми элементами, содержит в качестве подрешетки одну из восьми указанных ими конечных решеток, порожденных тремя попарно не сравнимыми элементами. Подобный результат для модулярных решеток, порожденных четырьмя попарно несравнимыми элементами, получили Гантер, Погунтке и Вилле ^{*37}.

Погунтке и Ривал [75, 4A333] доказали, что только конечные дистрибутивные подрешетки свободных решеток (описанные в [62, 1A283]) обладают следующим свойством: из вложимости такой решетки как упорядоченного множества в решетку L вытекает вложимость ее в L как решетки. Ривал и Сэндс [76, 3A328] описали дистрибутивные решетки, содержащие все свои гомоморфные образы. Это такие решетки M , для которых из вложимости дистрибутивной решетки L в M как упорядоченного множества вытекает вложимость L в M как решетки.

^{*35} Antonius R., Rival I.—AU, 1974, v. 4, p. 271—272.

^{*36} Huhn A. P.—Contrib. Univ. Alg., Coll. Math. Soc. Janos Bolyai, 17, 1977, p. 167—178.

^{*37} Ganter B., Poguntke W., Wille R.—Lattice Theory Conference. Ulm. (далее ULT), 1975, p. 148—151.

РЕШЕТКИ ПОДМНОЖЕСТВ

В этой статье продолжается обзор результатов по решеткам подмножеств, начатый автором в [76, 10A202], причем в основу положены те же принципы.

1. Решетки подмножеств специального вида

В этом разделе рассматриваются результаты исследований решеток бинарных отношений, решеток покрытий, решеток топологий, решеток рекурсивно перечислимых и рекурсивных подмножеств, решетки логик и т. п.

Отметим прежде всего, что Пудлак и Тума ^{*1} решили известную проблему теории решеток, доказав, что любая конечная решетка изоморфно вложима в решетку разбиений конечного множества. Ранее решетку разбиений конечного множества с различных точек зрения рассматривал Эйгнер [73, 2B274; 74, 7B516].

Шайн ^{*2} изучает алгебру $(F, \circ, \cap)$, где F — множество отношений порядка на некотором множестве, замкнутое относительно операций умножения $\circ$ и пересечения $\cap$ бинарных отношений. Оказывается, это — решетка, и каждая решетка $(L, \vee, \wedge)$ изоморфна $(F, \circ, \cap)$, где F подходящее множество порядков, которое можно выбрать так, чтобы все инфимумы подмножеств, существующие в L , были представлены пересечением соответствующих порядков из F .

Стейнби [74, 3A235] изучает связь между решеткой покрытий некоторого конечного множества и решеткой толерантностей на нем, руководствуясь при этом интересами теории автоматов. Полинова [74, 7A423] доказывает, что для всякой подрешетки L решетки эквивалентностей $E(A)$ на множестве A существует такое подмножество $Q \subset A$, что индуцированная на нем решетка L_Q есть подрешетка $E(Q)$, изоморфная L , причем если $\text{card} L \leq m$ (m — бесконечное кардинальное число), то Q можно выбрать так, чтобы $\text{card} Q \leq m$.

Лин Чанг [75, 12A288] сопоставляет каждой топологии на данном множестве X разбиение этого множества, определяемое связными компонентами исходной топологии, и изучает усло-

^{*1} Pudlák P., Tuma J. — Every finite lattice can be embedded in the lattice of all equivalences over a finite set. Preprint.

^{*2} Schein B. M. — AU, 1972, v. 2, 1—2; Schein B. M. — Ibid., p. 177—178.

вия, при которых указанное отображение является гомоморфизмом по объединениям или пересечениям. Здесь же укажем на работу Раду [76, 11A560] о связи между квазипорядками и топологиями на конечном множестве.

Марковский [75, 12A286] рассматривает полную решетку L , в которой каждый элемент является пересечением неразложимых в пересечение элементов и объединением неразложимых в объединение элементов. Эти порождающие элементы образуют упорядоченное множество $P(L)$. Изучается связь между L и $P(L)$, в частности, доказываемая, что L изоморфна решетке всех замкнутых подмножеств $P(L)$ относительно замыкания Галуа. Более детально рассматриваются геометрические и вполне дистрибутивные решетки. Розенберг [75, 10A332] устанавливает соответствие Галуа между универсальными алгебрами и отношениями на том же базисном множестве, при этом получаются антиизоморфные решетки множеств операций и множеств отношений на исходном множестве. Некоторые решетки подмножеств, связанные с линейно упорядоченными множествами и сохраняющими порядок отображениями, рассматриваются в работе Девиса [75, 11A511].

Пара (X, σ) , где σ — антирефлексивное и симметричное отношение на X , называется пространством ортогональности (п. о.). Этот объект изучают Рэндел, Янович и Фаулис [73, 11A288]. Если Γ — свободный моноид над X , то он превращается в п. о. лексикографически. Это — свободный моноид ортогональности. Для $A \subset X$ положим $A^\perp = \{x \mid (\forall y \in A) (x, y) \in \sigma\}$. Если $A^{\perp\perp} = A$, то A называется замкнутым. Множество $C(X)$ всех замкнутых подмножеств п. о. является полной орторешеткой. Эта решетка изучается для различных п. о., и в частности для Γ . Те же вопросы рассматриваются в работе Гоулдблата [75, 10A314].

Упорядоченное множество операторов замыкания на данном упорядоченном множестве изучают Фольдеш [73, 11A283] и Венсан [76, 4A279]. Как известно, решетка алгебраических операторов замыкания во многих отношениях хорошо изучена. Кольер и Салливан [77, 4A314] рассматривают совокупность всех квазизамыканий на данном множестве (то есть в общем определении оператора замыкания по Куратовскому идемпотентность не предполагается). Операторы замыкания в смысле Куратовского и операторы квазизамыкания не образуют решеток относительно естественного порядка. Авторы связывают эти упорядоченные множества с решеткой топологий, получая при этом новые результаты для последней.

Большое внимание по-прежнему уделяется решеткам топологий. Этому направлению посвящен раздел обзора В. И. Малыхина и В. И. Пономарева [76, 6A466] по общей топологии. В. И. Малыхин [77, 8A524] доказывает, что решетка всех регулярных топологий на счетном множестве (хаусдорфовость не предполагается) является дополняемой. Вейлент [74, 2A423] устанавливает, что всякая решетка вложима в решетку T_1 -топологий; в работе [74, 8A399] он продолжает свои исследования, начатые вместе с Ларсоном, и доказывает, что всякий конечный интервал решетки T_1 -топологий является дистрибутивным. Ш. Маеда [75, 4A328] получает, что решетка всех T_1 -топологий на бесконечном множестве является локально дистрибутивной, то есть на ней существует такое отношение конгруэнтности θ , удовлетворяющее определенным свойствам, что все классы его дистрибутивны.

В серии работ Росицкого [74, 12A226; 75, 5A274; 76, 6A476; 12A563] отметим следующие результаты. Всякую решетку можно так вложить в решетку всех топологий на некотором множестве, что образами ее элементов будут вполне хаусдорфовы топологии; существует решетка, которую нельзя вложить в решетку всех топологий какого бы то ни было множества так, чтобы образами ее элементов были метризуемые топологии. Находятся условия, при которых интервалы вида $[T_1, T_2]$, $[T)$ и $(T]$ в решетке всех топологий являются дистрибутивными, модулярными или простыми. Общие свойства решетки всех топологий (булевозначных топологий) получают Лидл и Кунерт [76, 3A514].

В работе Трона и Вейлента [75, 8A470] показано, что решетка $P(P(X))$ изоморфна некоторому интервалу в решетке всех T_1 -топологий на множестве X , указана мощность множества всех идеалов и фильтров в решетке всех T_1 -топологий.

Из других вопросов в этом направлении, которые разрабатывались в литературе, отметим следующие. Изучается, какие топологии на данном множестве имеют в решетке всех топологий непосредственно следующий или непосредственно предыдущий элемент (Агаш и Левин [74, 4A339]), какие топологии являются пересечением метрических, объединением порядковых и т. п. (Мейер [74, 9A561]), какие топологии представимы в виде супремума семейства, мощность которого меньше заданного кардинального числа λ , бикompактных хаусдорфовых топологий (А. И. Башкиров [74, 5A532]).

Пусть (A, Ω, T) — топологическая алгебра сигнатуры Ω с топологией T . Обозначим через $N(A)$ множество всех таких

топологий τ на A , что (A, Ω, τ) — топологическая алгебра, а через $D(T)$ — множество всех таких топологий τ , что $(A, \Omega, T \vee \tau)$ — топологическая алгебра. С. Д. Орлов [74, 9A353] доказывает, что $N(A)$ и $D(T)$ — полные решетки, и находит некоторые их свойства. Все это применяется для введения подходящей топологии в множестве всех открытых частичных гомеоморфизмов топологического пространства. Шмарда [76, 9A243] независимо рассматривает аналогичные вопросы для l -групп. Среди его результатов отметим следующий: если G абелева l -группа, то решетка $N(G)$ дистрибутивна; при этом все топологии, совместимые только с групповой операцией в G (игнорируется структура решетки на G), образуют модулярную решетку.

Продолжается изучение решеток расширений топологических пространств в частности бикомпактных расширений: Ферби [74, 1A471; 472, 473], Пелан [74, 6A588]. Кеннан и Тривикраман [76, 5A486] нашли необходимое достаточное условие, при котором полная дуально атомная решетка изоморфна решетке хаусдорфовых бикомпактных расширений локально-бикомпактного пространства. Расширения другого вида рассматриваются в работах: Салтен [76, 8A630], С. Г. Овсепян [76, 9A439; 11A564], Портер [76, 9A440], Мекк, Рейберн и Вудс [75, 1A513].

Задачи, которые были решены для решеток топологий, теперь ставятся для решеток структур, обобщающих топологические, в частности для решеток близостей, решеток псевдотопологий и т. п. Это направление представлено в работах Бойда [76, 11A568], Трона и Уоррена [74, 12A326], Рикке [75, 8A496].

Решетки рекурсивно перечислимых множеств и близкие вопросы. Упомянутые решетки, их фактор-решетки, фильтры и т. п. изучает Алтон [74, 8A75]. Здесь же отметим работы Гётце [77, 1A50] и С. С. Марченкова [77, 12A47]. Пусть α — допустимый ординал, $E(\alpha)$ — решетка всех α -рекурсивно перечислимых множеств. Лерман [77, 3A52] доказывает, что $E(\alpha)$ имеет наибольшие идеалы, фильтры и отношения, определимые в языке логики предикатов соответствующей сигнатуры. Мечти [74, 8A62] обсуждает понятие дополнения в решетке правильных субрекурсивных классов.

Решетки логик. По-прежнему много внимания уделяется решеткам логик высказываний в фиксированном алфавите с фиксированными правилами вывода. В этом направлении продолжает свои исследования И. С. Негру. В упомянутой в пре-

дыдущем обзоре работе [74, 2A73] он изучает решетку L всех примитивных логик, а в работе [75, 3A108] доказывает, что всякая счетная решетка изоморфно вложима в L , существует локально конечная подрешетка решетки L , в которой опровергается всякое нетривиальное решеточное тождество и квазитожество. Решетки суперинтуиционистских логик изучает А. В. Кузнецов [75, 12A63]. Л. Л. Максимова и В. В. Рыбаков [75, 3A122] доказали, что семейство M модальных логик, содержащих логику S_4 Льюиса, образует полную дистрибутивную решетку, и указали на ее связь с решеткой суперинтуиционистских логик. В работе [75, 10A91] Л. Л. Максимова устанавливает, что указанная решетка M дуально изоморфна решетке многообразий топологических булевых алгебр; это используется для изучения последней. Дальнейшие результаты о связи решетки суперинтуиционистских логик с решеткой модальных логик имеются в работе В. В. Рыбакова *³.

Пусть L — счетнозначная логика Лукасевича. Р. Ш. Григория [76, 11A108] показывает, что решетка ее расширений — это полная псевдобулева алгебра, дуально изоморфная решетке конечных последовательностей натуральных чисел, в которых никакие два различных элемента не находятся в отношении делимости, а порядок определяется так: $a \leq b$, если каждый элемент последовательности a делит некоторый элемент последовательности b .

Майерс [75, 7A415] изучает булевы алгебры элементарных теорий, то есть булевы алгебры элементарных классов этих теорий, описывает булевы алгебры элементарной теории отношений полного порядка и элементарной теории абелевых групп. Близкие вопросы рассматривает Маркус [76, 12A121]. Пейрис [72, 8A131, 77, 11A112] изучает решетку $S(M)$ элементарных подмоделей модели M полного непротиворечивого расширения T пеановской арифметики. Он доказывает, что для каждой полной теории T существует такая модель M , что в решетку $S(M)$ вложима простейшая модулярная недистрибутивная решетка $1-3-1$. Уилки [77, 11A113] доказывает, что $S(M)$ может быть любой конечной дистрибутивной решеткой, но не может быть решеткой $1-3-1$; она может быть также пятиэлементной немодулярной, но не может быть решеткой $1-2-2-1$.

*³ 4-я Всесоюзн. конф. по матем. логике. Кишинев, 1976, с. 128.

2. Решетки подалгебр

Через $\text{Sub}(A)$ будем обозначать решетку подалгебр алгебры A . Лампе ^{*4} продолжает свои исследования, связанные с доказательством независимости таких производных структур для универсальных алгебр, как решетка подалгебр, решетка конгруэнтностей, группа автоморфизмов (см. также работу Михлера и Шрекенбергера [77, 2A196]). Пару производных структур $(\text{Aut}(A), \text{Sub}(A))$ для универсальных алгебр A изучает Гулд ^{*5}.

В. Н. Салий и Н. П. Козырь [74, 11A353] доказали, что решётка является геометрической тогда и только тогда, когда она изоморфна решётке подалгебр некоторой идемпотентной алгебры A . Указано, когда $\text{Sub}(A)$ модулярна, дистрибутивна, в частности, рассмотрены случаи: A — полурешётка, идемпотентная полугруппа, решётка, груда, обобщённая груда.

Лампе [75, 4A358] рассматривает решетку $\text{Sub}(A)$ для унарных алгебр A . Его интересует, когда ее можно представить решеткой стабильных бинарных отношений на унарной алгебре так, чтобы заданный эндоморфизм порядка 2 перешел в операцию обращения бинарных отношений. Сю [75, 7A427] применяет известную теорему Биркгофа-Фринка о решетке подалгебр в абстрактной геометрии. В работе Манка [76, 2A395] устанавливаются связи между кардинальными числами: мощность алгебры, мощность ее решетки подалгебр, мощность ее решетки конгруэнтностей, мощность ее группы автоморфизмов. Андрека и Немети в работе [76, 2A407] исследуют вопрос, каким образом арность операций алгебры A влияет на свойства решетки $\text{Sub}(A)$. Д. А. Бредихин [76, 11A215] получает ряд результатов, устанавливающих связь между группами автоморфизмов и решетками подалгебр универсальных алгебр (см. также его работы [75, 3A227; 77, 2A185]).

Обзор Йонссона [75, 10A334] о результатах и направлениях алгебраических исследований затрагивает также вопросы, связанные с изучением решеток подалгебр, конгруэнтностей и т. п. и их связей. В работе Гелвина и Прикри [77, 12A333] рассматриваются алгебры с одной бесконечноместной частичной операцией (ω -алгебры Йонссона), доказываемое существование таких алгебр любой заданной мощности с условием обрыва убывающих цепей подалгебр.

^{*4} Lampe W.—AU, 1972, v. 2, p. 99—102.

^{*5} Gould M.—AU, 1972, v. 2, p. 369—374.

Перейдем к работам, посвященным конкретным классам алгебр.

Группы. По-прежнему велико число работ, посвященных решеткам подгрупп группы, причем большое внимание уделяется конечным группам. Нигель [73, 7A204] изучает решетки подгрупп таких групп, порядок которых содержит самое большее три простых делителя. Строятся таблицы, по которым можно установить свойства групп с данной решеткой подгрупп: абелевость, нильпотентность, метацикличность, число нормальных подгрупп и т. п. По таблицам можно также установить, будут ли изоморфны любые две группы указанного порядка, имеющие данную решетку подгрупп. Этот же автор в работе [73, 10A151] получает, что решетка подгрупп конечной группы, порядок которой свободен от квадратов, существенно зависит от числа силовских подгрупп данного порядка.

Круль [73, 11A203] вводит и изучает новые условия конечности для групп и модулей, исходя из условий конечности для решеток подгрупп и подмодулей соответственно. Пусть G — конечная разрешимая группа, $N \nabla G$ и $k(N)$ — решетка всех подгрупп из N , перестановочных со всеми силовскими подгруппами группы G . В. И. Тихоньких [73, 12A198] находит условия дистрибутивности $k(N)$. В работе Паздерского [74, 4A164] изучается решетка всех достижимых подгрупп конечной группы, в частности для разрешимых групп выделены свойства, инвариантные относительно изоморфизмов этой решетки.

Фриджеро [76, 1A224] рассматривает m -группы, то есть конечные разрешимые группы, в которых свойство быть модулярной подгруппой является транзитивным. Доказывается, что решетка подгрупп такой группы модулярна. Форт [77, 1A183] изучает строение конечных слабомодулярных групп. Дается полное описание таких групп в примарном случае, имеются и другие результаты.

Полное описание конечных групп, решетки подгрупп которых являются подпрямыми произведениями некоторых решеток, дает Менегатто [77, 9A224] (ср. с теоремой Судзуки [61, 7A255K]). Специальные подрешетки решетки всех подгрупп группы рассматривает Мейкен [74, 4A166; 75, 8A245].

Перейдем к рассмотрению работ, в которых конечность группы не предполагается. Жемберы [73, 12A313] доказывает, что любая дистрибутивная решетка L изоморфна подрешетке решетки $\text{Sub}(G)$, где G свободна в классе всех групп или в классе абелевых групп, при этом мощность множества свободных образующих G не более, чем $2^{\text{card } L}$. Такой же результат

получен для недистрибутивных решеток, удовлетворяющих некоторым дополнительным условиям. Бруно [75, 11A389] рассматривает дистрибутивные пары в решетке $\text{Sub}(G)$, выделяя случай пары субнормальных подгрупп. То и Фанг^{*6} изучают группы с системой дополняемых абелевых подгрупп.

Сформулируем результат, полученный в работе Бруны и Д'Андреа [75, 3A364]. Для любой группы G следующие условия эквивалентны: 1) решетка всех нормальных подгрупп G булева, 2) решетка всех субнормальных подгрупп G булева, 3) G есть прямое произведение простых групп, циклические сомножители в котором имеют различные конечные порядки.

Вопрос о наличии дополнений в решетке Ω -подгрупп Ω -групп продолжает изучать Емальди [73, 6A259, 77, 2A253]. Вареча [75, 12A294; 76, 4A280] изучает решетку подгрупп группы автоморфизмов булевой алгебры и связь ее с решеткой подалгебр этой булевой алгебры. Пусть дан мономорфизм $\varphi: \text{Sub}(G) \rightarrow N(H)$, где $N(H)$ — решетка нормальных подгрупп группы H . Как влияют свойства группы G на свойства группы H ? Этот вопрос разбирается в работе Де Виво [77, 7A215].

Отметим результат, полученный А. Ю. Ольшанским и сообщенный им на семинаре кафедры высшей алгебры МГУ в сентябре 1978 г., который можно сформулировать так: существует бесконечная группа G , любая собственная подгруппа которой имеет простой порядок, это значит, что $\text{Sub}(G)$ имеет вид $1 - \infty - 1$.

Продолжается изучение решеточных (структурных) изоморфизмов групп. М. Н. Аршинов [73, 12A239] строит пример смешанной нильпотентной группы класса $n \geq 3$, которая не определяется строго решеткой своих подгрупп, хотя и содержит подгруппу без кручения того же класса нильпотентности. Он дает специальные признаки строгой определяемости нильпотентной группы и доказывает, что всякая нильпотентная непериодическая группа строго определяется своей решеткой подполугрупп. Л. Е. Садовский и М. Н. Аршинов [74, 2A222] доказали, что группа, являющаяся дискретным сплетением двух групп без кручения, строго определяется решеткой своих подгрупп.

Б. В. Яковлев [75, 11A293] нашел необходимые и достаточные условия, при которых решетка изоморфна решетке подгрупп группы, и доказал, что всякий решеточный изоморфизм группы, любые два элемента которой порождают свободную

^{*6} Toh K. H., Phang S. W.—Nanta Math., 1974, v. 7, N 1, p. 93—100.

группу, индуцируется групповым изоморфизмом и притом только одним. В другой своей работе [76, 6A256] он приводит пример решеточно изоморфных, но не изоморфных разрешимых групп без кручения, решив тем самым отрицательно известную задачу теории групп. Отметим, что в сообщении, сделанном на семинаре кафедры высшей алгебры МГУ в ноябре 1978 г., он сформулировал достаточные условия, при которых смешанная нильпотентная группа строго определяется решеткой своих подгрупп; в некотором смысле эти условия являются необходимыми.

А. С. Пекелис [76, 11A277] продолжает свои исследования по решеточной характеристике радикалов в группе. Н. А. Пionтковская [76, 12A287] строит серию 3-ступенно нильпотентных смешанных групп, каждая из которых не определяется строго решеткой своих подгрупп. Серия работ Р. Шмидта [75, 6A263; 76, 2A250; 77, 12A217] посвящена решеточно инвариантным классам групп. В частности, он устанавливает существование серии решеточно инвариантных формаций и указывает класс дважды транзитивных групп, определяемых своими решетками подгрупп. В работе [76, 1A223] он продолжает изучение образов нормальных подгрупп при проектировании. Штрот [77, 2A228] характеризует решеткой подгрупп группу $PSL(2, 7)$. Отметим, что группа $PSL(3, q)$ определяется решеткой централизаторов всех своих подгрупп в классе всех конечных групп без центра. Это — результат А. В. Васильевой [77, 12A196].

Г. В. Пивоварова [76, 9A232] продолжает изучение аналогичных вопросов для групповых пар. Пусть α — автоморфизм группы G и $\alpha^2 = 1_G$, пусть далее $Sub(G, \alpha)$ — решетка всех α -допустимых подгрупп G . Ее изучает Н. П. Белякова [73, 11A204; 74, 7A315]. Две группы G_1 и G_2 называются LI -изоморфными, если существуют такие инволютивные автоморфизмы α_1 и α_2 этих групп соответственно, что $Sub(G_1, \alpha_1)$ и $Sub(G_2, \alpha_2)$ изоморфны. В первой из указанных выше работ дается описание всех групп, которые LI -изоморфны циклическим. Во второй работе найдены условия, при которых каждый изоморфизм решеток $Sub(G_1, \alpha_1)$ и $Sub(G_2, \alpha_2)$ индуцируется изоморфизмом (G_1, α_1) и (G_2, α_2) .

Тематика, связанная с рассмотрением элементарной теории решеток подгрупп группы, представлена работой А. М. Слободского и Э. И. Фридмана [76, 11A222], в которой доказывается неразрешимость этой теории для различных классов абелевых групп: произвольных, без кручения, полных периодиче-

ских. Херрман и Погунтке *⁷ доказали, что класс подрешеток решеток нормальных подгрупп не является элементарным. Разрешимость некоторых универсальных теорий решеток подгрупп группы показал Э. И. Фридман *⁸.

В цитированных выше работах мы отмечали случаи рассмотрения решеток подгрупп специального вида, в частности нормальных подгрупп. В работе Маркьонны [73, 9A227] кроме решеток нормальных подгрупп изучаются также решетки подмножеств группы, содержащих единицу и инвариантных относительно обращения, а также подмножеств, замкнутых относительно n -х степеней и т. п.; выясняется, когда они совпадают, являются модулярными, дистрибутивными, булевыми и т. п. Следующий результат — решетки конечных нормальных подгрупп в групповых базисах изоморфных целочисленных групповых колец изоморфны — получен независимо А. А. Бовди *⁹, Сегалом *¹⁰ и Цигенбальгом [76, 1A225]. Решетку вполне характеристических подгрупп группы изучает В. С. Пятков [75, 1A258].

Имеется одна работа по решеткам подгрупп l -групп: М. Якубикова [75, 12A186] доказала, что решетка всех l -подгрупп l -группы G дистрибутивна тогда и только тогда, когда G изоморфна подгруппе аддитивной группы всех рациональных чисел с естественным порядком.

Вуд [73, 7A205] изучает решетку гомоморфов. Он рассматривает только конечные разрешимые группы, а те гомоморфы, которые он вводит, образуют полную решетку с дополнениями, но не модулярную. Аналогичный результат получает Хоукс [77, 1A181] для решетки всех классов Шунка (вид гомоморфов) группы.

Ю. Н. Мухин продолжает исследования решеток замкнутых подгрупп топологических групп. В работе [76, 7A283] он изучает проектирования топологических p -групп и доказывает, что для абелевых компактных групп проектирования сохраняют индуктивную компактность (то есть любое конечное подмножество содержится в компактной подгруппе) и компактность. Совместно с Е. Н. Старухиной [74, 12A195] он дает описание локально компактной группы, в решетке замкнутых подгрупп которой всякое семейство попарно несравнимых элемен-

*⁷ Herzm ann Ch, Poguntke W.—AU, 1974, v. 4, p. 280—286.

*⁸ 4-я Всесоюзн. конф. по матем. логике. Кишинев, 1976, с. 150.

*⁹ Групповые кольца. Ужгород, 1974.

*¹⁰ Segal D.—Arch. Math., 1975, v. 26, p. 139—143.

тов (антицепь) конечно. И. В. Протасов и В. С. Чарин ^{*11} устанавливают связь между строением топологической группы и топологическими свойствами решетки ее замкнутых подгрупп в экспоненциальной топологии.

Полугруппы. Розенфельд [73, 12A179] дает полное описание таких полугрупп S , для которых $\text{Sub}(S)$ — цепь. Юргенсен и Вик [74, 5A190] составили программу на АЛГОЛ-60, позволяющую вычислять решетку подполугрупп конечной полугруппы, содержащей единственный идемпотент, в частности конечной группы. С. И. Кацман [75, 6A224], расширяя результаты Л. Н. Шеврина, доказывает, что всякую полугруппу можно вложить в такую полугруппу S , для которой $\text{Sub}(S)$ есть решетка с дополнениями (в K -полугруппу), а всякая периодическая K -полугруппа есть цепь вполне простых полугрупп. Впоследствии он усиливает этот результат ^{*12}. Вариско [75, 6A223] рассматривает решетку $\text{Sub}(M)$ для моноида M , отличного от группы, изучает дистрибутивные и модулярные пары этой решетки, ее полумодулярность и т. п. Для специальных классов полугрупп это делает Янович [76, 12A220].

Ю. А. Шарков [75, 8A217] доказал, что следующие классы полугрупп определяются своей решеткой подполугрупп: класс всех вполне регулярных полугрупп, класс всех вполне регулярных инверсных полугрупп, класс всех простых полугрупп без нуля над неоднородными группами. Получены также некоторые результаты о строгой определяемости. В. А. Баранский [76, 8A241] дает необходимые и достаточные условия, при которых коммутативная полугруппа решеточно изоморфна коммутативной архимедовой полугруппе без идемпотентов, причем если это условие выполнено, то полугруппа сама оказывается архимедовой. А. Я. Овсянников [77, 9A203] получил следующий результат: любая полугруппа, свободная в произвольном надкоммутативном многообразии полугрупп, определяется своей решеткой подполугрупп в классе всех полугрупп. В дальнейшем он разрабатывает различные аспекты следующей проблемы ^{*13}: в каких многообразиях полугрупп свободные полугруппы решеточно определяются. Решеточными изоморфизмами полугрупп преобразований занимается А. А. Борисов. Он находит такие полугруппы преобразований, каж-

^{*11} 14-я Всесоюзн. алгебр. конф., Новосибирск, 1977. т. 1, с. 56.

^{*12} 2-й Всесоюзн. симпозиум по теории полугрупп. Свердловск, 1978, с. 32.

^{*13} 2-й Всесоюзн. симпозиум по теории полугрупп. Свердловск, 1978, с. 68—69.

дый изоморфизм решеток подполугрупп которых индуцируется изоморфизмом или антиизоморфизмом этих полугрупп. В работе [75, 11A237] это делается для полугрупп направленных преобразований упорядоченных множеств специального вида, в работе [77, 11A205] — для полугрупп полных преобразований, а в работе [77, 12A159] — для полугрупп частичных преобразований. Во всех этих случаях выделяются подполугруппы, обладающие требуемым свойством. Продолжая исследования В. А. Баранского (см. предыдущий обзор), этот автор получает аналогичные результаты для конечно определенных полугрупп *¹⁴.

Общие идеи теоретико-решеточного подхода к изучению упорядоченных полугрупп и групп изложены в работе Неймана [73, 12A250]. Ряд результатов для топологических n -групп получен в работе Оппа [75, 7A444] с точки зрения решеток n -подгрупп. Б. П. Танана [76, 11A221] находит условия модулярности, дистрибутивности, линейности для решеток замкнутых подполугрупп топологических полугрупп, а также некоторые условия дополняемости в этой решетке *¹⁵. В работе Мейджила и Суббия [77, 2A557, 9A211] рассматривается упорядоченное множество регулярных R -классов полугруппы непрерывных преобразований топологического пространства, в частности, континуума Пеано.

Кольца, модули, алгебры. Г. С. Мурзинова [74, 7A370] доказывает, что кольцо тогда и только тогда является кольцом конечной ширины (в смысле решетки подколец), когда оно удовлетворяет условию минимальности для подколец; наряду с этим, она вводит другой тип конечной ширины кольца (по максимальной длине антицепей в решетке подколец) и характеризует кольца такого типа. П. А. Фрейдман и Ю. Г. Шмаков [76, 11A322] описывают специального вида кольца простой характеристики с модулярной решеткой подколец.

О решетке подмодулей рассказывается в обзоре А. В. Михалёва [75, 6A408], который охватывает работы, прореферированные в РЖ «Математика» с 1969 по 1972 гг. Пирс *¹⁶ доказал, что для всякой компактно-порожденной вполне дистрибутивной решетки L существует кольцо R и R -модуль M , такие, что $L \cong \text{Sub}(M)$. В этой работе содержатся и другие результаты о решетке подмодулей модуля. Хед *¹⁷ дал характеристику

*¹⁴ Там же, с. 12.

*¹⁵ Там же, с. 91.

*¹⁶ Pierce R. S.—AU, 1971, v. 1, p. 192—199.

*¹⁷ Head T.—Ibid., p. 200—202.

лево-нетеровых колец на языке решетки подмодулей левых модулей над ними.

Хатчинсон [73, 9A296; 77, 1A289] получил, что класс решеток, вложимых в решетки подмодулей унитарных левых R -модулей (R — нетривиальное коммутативное кольцо с единицей), может быть описан хорновскими формулами и, следовательно, является квазимногообразием. Эти же вопросы обсуждаются в работе Маккаи и Макнульти^{*18} с тем же результатом. Бишо [74, 5A297] изучает модули, в которых каждое прямое слагаемое имеет единственное дополнение. Стивенсон [74, 9A309] находит ряд свойств модулей с дистрибутивной решеткой подмодулей (так называемых дистрибутивных модулей) и приводит их характеризацию. В частности, он описывает кольца R такие, что модуль R^R дистрибутивен. С этой работой перекликается работа Камилло [76, 2A346], в которой тоже даются условия дистрибутивности модуля. Фелтингс [76, 5A303] рассматривает некоторые специальные подмножества решетки подмодулей модуля. Описание этой решетки для неразложимых проективных $F_{\Gamma R}$ -модулей дает Хемерник [77, 1A252].

Херрман и Хун в работе [76, 3A326] рассматривают некоторые равенства в решетке подмодулей, а в работе [76, 6A314] доказывают разрешимость проблемы тождества слов в свободных решетках подмодулей.

В ряде работ рассматривается тот же круг вопросов для решеток подпространств линейного пространства. Мореш [73, 12A307] находит свойства решетки замкнутых подпространств гильбертова пространства, которые выделяют ее как так называемую гильбертову решетку. Погунтке [75, 10A315] вводит понятие S -пространства. Это — пара (V, φ) , состоящая из векторного пространства V и монотонного отображения φ упорядоченного множества S в решетку $\text{Sub}(V)$. Он строит общую теорию для классификации неразложимых S -пространств. Идейно эта работа близка к работам И. М. Гельфанда и В. А. Пономарева [74, 10A289, 77, 3A259].

Отметим еще два результата, связанных с геометрическими решетками: Херрман [74, 1A297] доказал, что каждая квазипланарная решетка вложима в решетку подпространств некоторой дезарговой проективной геометрии; Бэр и Дессар [76, 5A297] показали, что решетка линейных подмножеств так называемого выпуклого пространства геометрическая.

^{*18} M a k k a i M., M c N u l t y J.—AU, 1977, v. 7, p. 25—31.

Пусть F — свободная ассоциативная алгебра с единицей над полем k , F^m — подпространство, натянутое на одночлены степени $m \geq 0$. В. Н. Герасимов [77, 8A306] дает метод изучения свободных алгебр, заключающийся в построении некоторого формального исчисления, теоремами которого являются утверждения о решетках подпространств. Доказана теорема: если f — произвольный однородный элемент алгебры F , то множество $\{F^m f F^n \mid m, n \geq 0\}$ порождает дистрибутивную решетку подпространств.

В серии работ Е. И. Тэбырцэ [74, 2A288; 75, 7A381; 77, 9A329] изучается решетка кручений в категории левых унитарных модулей над ассоциативным кольцом с единицей, в частности, выясняется, когда эта решетка будет булевой и цепью, доказываемся, что она дистрибутивна и импликативна. К этому направлению относится и исследование Гоулена [77, 10A173], который выясняет, когда указанное соответствие между кольцами и решетками можно продолжить до функтора из категории колец в категорию полных решеток. В работе Е. И. Тэбырцэ и И. Д. Буну*¹⁹ рассматриваются те же вопросы для решетки предкручений унитарных модулей.

Решеточные изоморфизмы алгебр Ли продолжает изучать А. А. Лашхи [74, 7A403; 76, 3A313; 2A354]. Полученные им результаты во многом аналогичны теоретико-групповым. Этим же вопросом занимается Барнес [74, 5A288], который описывает решеточные изоморфизмы полупростых алгебр Ли. В. М. Копытов [77, 12A283] изучает строение решеток выпуклых подалгебр решеточно упорядоченных алгебр Ли. А. Г. Гейн [76, 11A362] обобщает на более широкие классы алгебр Ли результаты Колмана [67, 7A245] и Барнса [68, 3A304].

Решетки. Ривал *²⁰ рассматривает связь между двумя решетками L_1 и L_2 , для которых $\text{Sub}(L_1) \cong \text{Sub}(L_2)$ и, в частности, получает довольно просто основной результат Н. Д. Филиппова [66, 12A320]: проективный образ модулярной (дистрибутивной, дополняемой) решетки является модулярной (дистрибутивной, дополняемой) решеткой. Близкие вопросы рассматриваются в работах Ко*²¹, Чена и Ко*²²,

*¹⁹ 14-я Всесоюзн. алгебр. конфер., Новосибирск, 1977, т. 2, с. 73.

*²⁰ Rival I. — AU, 1972, v. 2, p. 395.

*²¹ Koh K. M. — Nanta Math., 1972, v. 5, N 3, p. 18—37; Koh K. M. — Ibid., 1973, v. 6, N 1, p. 68—79.

*²² Chen C. C., Koh K. M. — Ibid., 1972, v. 5, N 3, p. 93—95.

Лаксера^{*23}. Ко доказал, что $\text{Sub}(L)$ является решеткой с дополнениями тогда и только тогда, когда L — цепь. Результат Лаксера: $\text{Sub}(L)$ для конечной решетки L полумодулярна тогда и только тогда, когда L не содержит подрешетки 2×3 . В указанной работе Чена и Ко рассмотрены свойства решетки всех выпуклых подрешеток решетки: $\text{CS}(L)$. Доказано, что $\text{CS}(L) \cong \text{CS}(K)$ тогда и только тогда, когда K и L — прямые произведения подрешеток, которые изоморфны или антиизоморфны.

Гретцер, Ко и Маккаи [73, 7A295] получают следующий результат: решетка L тогда и только тогда изоморфна решетке подалгебр булевой алгебры, когда она 1) алгебраическая и 2) для любого $a \in L$ решетка (a) изоморфна некоторой решетке конечных разбиений. Отсюда выводится известный факт, что булева алгебра с точностью до изоморфизма определяется своей решеткой подалгебр.

Решеточные операции над отношениями нормальности на конечной решетке изучает Ниминен [77, 9A357], нашедший условие дистрибутивности решетки отношений нормальности. Секанина^{*24} рассматривает специального вида упорядочение в множестве всех подрешеток решетки, являющееся расширением включения (подробное об этой работе см. в статье Т. С. Фофановой в настоящем сборнике).

3. Решетки идеалов

Мы рассматриваем здесь решетки идеалов всевозможных алгебраических систем. Кольца, идеалы которых образуют цепь, изучают Кларк и Лянг [74, 6A332]. В работе Кларка и Дрейка [74, 6A353] изучаются конечные цепные слева кольца (то есть их левые идеалы образуют цепь). В книге Андерсена и Фуллера [75, 7A380] рассматривается решетка односторонних идеалов кольца, устанавливается связь этой решетки со свойствами категории модулей над этим кольцом. Арифметические справа кольца (под названием D -кольца) изучает Брангс [77, 3A220]. Ашкар [77, 10A161] указывает ряд свойств, характеризующих арифметические слева кольца, в частности, любой минимальный (максимальный) левый идеал такого кольца является двусторонним. Главные элементы в решетке идеалов кольца рассматривают Маккарти

^{*23} L a k s e r H. — Ibid., 1973, v. 6, N 1, p. 55—57.

^{*24} S e k a n i n a M. — LT, p. 379—394.

[73, 10A330] и Наккар [73, 10A331]. В работе Лайоша [75, 1A331] содержатся результаты о некоторых полурешетках идеалов колец.

Катц [74, 11A312; 75, 7A393] изучает группу автоморфизмов решетки внутренних идеалов квадратичных йордановых алгебр. Дж. Хаджиев [75, 12A179] получает обобщение теоремы Гильберта — Нагаты из теории инвариантов, формулируя его на языке решетки идеалов. Укажем на работу К. К. Крачилова [77, 9A254], в которой описывается решетка проективных наследственных радикальных замыканий в решетке идеалов кольца целых чисел.

Наиболее активно в рассматриваемый период разрабатывается теория решеток идеалов решеток. Гаскил [73, 7A298] обнаруживает, что конечная дистрибутивная решетка тогда и только тогда вложима в решетку L , когда она вложима в решетку $I(L)$ всех идеалов решетки L (Нельсон^{*25} исправляет ошибочное доказательство в указанной работе). Из этого факта следует, что если L дистрибутивна, то L и $I(L)$ имеют одни и те же конечные подрешетки. Бейкер и Хейлс^{*26} идут дальше и показывают, что решетка $I(L)$ есть гомоморфный образ подалгебры ультрастепени L и что всякое положительное универсальное предложение, истинное в L , истинно в $I(L)$. Фриз [76, 3A321] описывает решетку $I(L)$ как подпрямое произведение решеток специального вида. Корниш, продолжая свои исследования по так называемым нормальным решеткам, характеризует эти решетки и решетки Стоуна на языке решеток идеалов. Пример результата: решетка L нормальна тогда и только тогда, когда множество $A(L)$ всех аннулирующих идеалов есть подрешетка решетки $I(L)$ [73, 11A292]. В другой работе [75, 4A331] он доказывает эквивалентность условно $\vee$ -непрерывных решеток L и решеток $K(L)$ их замкнутых идеалов, находит условие булевости $K(L)$. Бишоп [77, 2A348] рассматривает вложение $j: L \rightarrow K(L)$ как пополнение решетки L и изучает ковариантный функтор $K: L \rightarrow K(L)$ из категории всех решеток и $\vee$ -полных гомоморфизмов в категорию полных решеток и $\vee$ -полных гомоморфизмов.

Степ [73, 7A192] описывает компактные топологические решетки, которые изоморфны топологическим решеткам всех замкнутых идеалов компактных топологических полуреше-

*25 Nelson E.—AU, 1974, v. 4, p. 135—140.

*26 Baker K., Hales A. W.—Ibid., p. 250—258.

ток. Ниминен [76, 8A406] рассматривает связь между $\vee$ -полурешеткой и решеткой ее идеалов. В работе [77, 12A309] он выясняет, когда квазирешетка идеалов дистрибутивной квазирешетки будет решеткой. Хофман и Стралка [77, 6A230] изучают полурешетку по пересечениям всех решеточных идеалов компактной (топологической) полурешетки.

Еще одну характеристику упорядоченного множества $P(L)$ всех простых идеалов дистрибутивной решетки L дает Дейви*²⁷. Адамс [76, 2A383] доказывает, что при некоторых ограничениях из изоморфизма $P(L_1)$ и $P(L_2)$ следует изоморфизм L_1 и L_2 .

Росицкий [74, 4A235] вводит понятие m -идеала упорядоченного множества для бесконечного кардинального числа m и понятие m -компактного элемента. Оказывается, что решетка m -компактно порождена тогда и только тогда, когда она изоморфна решетке m -идеалов некоторого упорядоченного множества.

В работе Блайера и Конрада [74, 5A315] изучается решетка замкнутых идеалов абелевых l -групп (замкнутость понимается, как и выше, в смысле бесконечных объединений). Мерлье [73, 7A174] получает следующий результат: конечная полугруппа S порядка n тогда и только тогда является ниль-полугруппой, когда она содержит один идемпотент и решетка ее непустых идеалов имеет длину $n-1$. Укажем также на работу Фаттороси — Барнаба [75, 9A267], в которой рассматриваются специального вида подмножества универсальной алгебры, близкие к идеалам, и доказывається, что они образуют алгебраическую решетку.

Близка к теме этого раздела работа Яновича [76, 12A220), в которой изучаются решетки идеалов специальных, введенных автором полугрупп. Здесь же отметим работу Корниша [76, 7A312] о булевых отношениях ортогональности. Решетку идеалов полугруппы эндоморфизмов универсальной алгебры изучает И. И. Валуцэ*²⁸.

4. Решетки конгруэнтностей

Обзор последних результатов по решеткам конгруэнтностей универсальных алгебр дан в статье Йонссона [76, 9A343]. Мы будем обозначать решетку конгруэнтностей алгебры A через $\text{Con}(A)$. Как известно, уже было много пред-

*²⁷ Davey B. A.—AU., 1973, v. 3, p. 345—347.

*²⁸ 14-я Всесоюзн. алгебр. конф. Новосибирск, 1977, т. 2, с. 92.

принято попыток упростить доказательство фундаментального результата Гретцера и Шмидта о представимости алгебраической решетки как решетки конгруэнтностей универсальной алгебры. В работе Лампе [74, 7A434] приводится сравнительно простая конструкция унарной алгебры, решетка конгруэнтностей которой изоморфна заданной алгебраической решетке. Упрощенное доказательство упомянутой теоремы Гретцера-Шмидта дает также Пудлак^{*29}.

По-прежнему большое внимание уделяется следующей задаче. Пусть A — некоторое множество, а L — подрешетка решетки $E(A)$ всех эквивалентностей на A . Когда на A существует структура алгебры, для которой L является решеткой всех конгруэнтностей? Армбрест [73, 11A321] обсуждает эту проблему в целом. Он строит формальный язык для описания свойств решетки конгруэнтностей частичной алгебры и делает предположение о неразрешимости в этом языке указанной проблемы (см. его же [71, 9A269]). М. А. Кобан [73, 12A304] доказывает, что если $|A| \leq 3$, то любая подрешетка решетки $E(A)$ обладает указанным свойством (в терминологии автора — является благородной), с другой стороны, если A конечно и $|A| > 3$, то существует пятиэлементная подрешетка решетки $E(A)$, содержащая равенство и универсальное отношение и не являющаяся благородной. Армбрест [74, 3A55] изучает системы вида (A, C) , где A — множество, а C — решетка конгруэнтностей некоторой частичной алгебры на A . Бандельт [75, 11A391] с помощью специальных конструкций (особого вида интервалов) описывает такие подрешетки $E(A)$, которые являются решетками конгруэнтностей двузначных алгебр на A (двузначная алгебра — это унарная алгебра, каждая операция которой имеет только два значения). Эту же задачу для общего случая с использованием методов теории графов решают Вернер^{*30} и Пудлак и Тума^{*31}.

Решетка L с нулем и единицей называется (квази) сильно представимой конгруэнтностями, если из того, что L изоморфна (замкнутой относительно бесконечных объединений и пересечений) подрешетке L' решетки $E(A)$, причем $\Delta, A^2 \in L'$, следует, что на A можно задать структуру алгебры, решетка конгруэнтностей которой совпадает с L' . Известно^{*32}, что всякая конечная дистрибутивная решетка сильно представима,

^{*29} Púdlak P.—AU, 1976, v. 6, p. 269—275.

^{*30} Werner H.—LT, p. 433—453.

^{*31} Púdlak P., Tuma J.—LT, p. 301—341.

^{*32} Quackenbush R., Wolk B.—AU, 1971, v. 1, p. 165—166.

но решетка $1-3-1$ не является таковой. В работах Драшкови-
вичовой [74, 7A421; 75, 5A287] доказано, что никакая беско-
нечно дистрибутивная решетка не является сильно представи-
мой, но всякая алгебраическая вполне дистрибутивная ре-
шетка квази сильно представима. Пудлак^{*33} доказал, что ес-
ли решетка конечно сильно представима, то она дистрибутив-
на. Таким образом получается, что в классе всех конечных ре-
шеток сильная представимость и дистрибутивность равно-
сильны.

Мультипликативный тип алгебры — это последователь-
ность $m = (m_1, m_2, \dots)$ кардинальных чисел, каждое из которых
 m_i есть мощность множества i -арных операций этой алгебры.
Йонссон и Уэйли [75, 1A368] доказывают, что если для лю-
бой алгебры A типа m существует такая алгебра A' типа m' ,
что $\text{Con}(A) \cong \text{Con}(A')$, то для всех $k \geq 1$ имеет место $\sum_{i \geq k} m_i \leq$
 $\leq \sum_{i \geq k} m'_i$. Свами [75, 4A350] называет элемент Θ решетки

$\text{Con}(A)$ неразложимым, если $\varphi_1 \cap \varphi_2 \subset \Theta$ влечет $\varphi_1 \subset \Theta$ или
 $\varphi_2 \subset \Theta$ для любых $\varphi_1, \varphi_2 \in \text{Con}(A)$. На множестве X всех нераз-
ложимых элементов решетки $\text{Con}(A)$ вводится топология, и
полученное топологическое пространство называется спектром
 A . В случае, когда конгруэнтности на A перестановочны и
 $\text{Con}(A)$ дистрибутивна, дается представление алгебры A пуч-
ками. Эти же вопросы разрабатываются в работе Вольфа [75,
5A299]. К этой же тематике можно отнести некоторую часть
работы Дейви [74, 7A435].

Отметим любопытный результат Конти и Пасини [75,
10A331]: если A не простая алгебра с перестановочными кон-
груэнтностями и решетка $\text{Con}(A)$ самодвойственна, то A со-
стоит из четырех элементов. Баррис^{*34} рассматривает решет-
ку $\text{Con}(A)$ для алгебр A , являющихся конечными прямыми
произведениями алгебр, и применяет полученные результаты
для описания алгебр с булевой решеткой конгруэнтностей.
Драшкови́чова^{*35} получает, что из некоторых условий пере-
становочности конгруэнтностей следует дистрибутивность
 $\text{Con}(A)$.

Алгебра с одной унарной операцией называется унаром.

*33 P ú d l a k P.—AU, 1977, v. 7, p. 85—92.

*34 Burris S.—AU, 1975, v. 5, p. 213—223.

*35 Draskovicova H.—Math. Casop. Sloven. Acad. Vied., 1973,
v. 23, p. 69—87.

Д. П. Егорова [77, 12A330] описывает довольно просто унары, решетка конгруэнтностей которых модулярна, дистрибутивна или является цепью. В совместной работе Д. П. Егоровой и Л. А. Скорнякова [78, 2A263] описываются унары, решетка конгруэнтностей которых является решеткой с дополнениями, модулярной решеткой с дополнениями или булевой алгеброй (см. также статью Д. П. Егоровой [78, 2A285]).

Бандельт [77, 2A352] доказывает, что для любой решетки L следующие условия эквивалентны: 1) L — алгебраическая и вполне дистрибутивная решетка, 2) L изоморфна решетке конгруэнтностей регулярной двузначной алгебры (регулярность означает, что каждая конгруэнтность определяется любым своим классом), 3) L изоморфна решетке конгруэнтностей регулярной двузначной алгебры с перестановочными конгруэнтностями.

Отметим направление глобального изучения решеток конгруэнтностей на алгебрах многообразия. Некоторые итоги этого изучения подведены в статьях Йонссона^{*36}. Балмен-Флеминг, Дей и Тейлор^{*37} доказали, что если все подалгебры A^2 имеют регулярные конгруэнтности, то решетка $\text{Con}(A)$ модулярна. Из этого факта, в частности, следует, что если решетки конгруэнтностей алгебр многообразия V регулярны, то все они модулярны. Этот результат сохраняется, если рассматривать только конечные алгебры многообразия V . Нейшен^{*38} показал, что из некоторых конгруэнц-тождеств на многообразии алгебр, то есть тождеств, выполняющихся на всех решетках $\text{Con}(A)$ для алгебр A данного многообразия, следует модулярность. Отметим, что ранее Дей^{*39} показал, что p -модулярность влечет модулярность. В другой своей работе^{*40} он обсуждает следующие гипотезы: 1) из всякого нетривиального конгруэнц-тождества на данном многообразии следует модулярность, 2) если нетривиальное решеточное тождество имеет характеризацию мальцевского типа, то для данного многообразия все решетки конгруэнтностей модулярны. Первая гипотеза оказалась верной для унарных алгебр (Нейши^{*41}), для полугрупп (Эванс [71, 12A172], Фриз и

^{*36} Jónsson B.— LT, p. 195—206; [76,9A343].

^{*37} Bulman-Fleming S., Day A., Taylor W.— AU, 1974, v. 4, p. 58—60.

^{*38} Nation J.— AU, 1974, v. 4, p. 78—80.

^{*39} Day A.— AU, 1973, v. 3, p. 398—399.

^{*40} Day A.— AU, 1976, v. 6, p. 291—301.

^{*41} Nation J.— AU, 1976, v. 6, p. 78—88.

Нейшн [74, 9A344]), полурешеток (Нейшн^{*42}). Дей получает следствия этих результатов для многообразий решеток. Отметим одно из них: существует континуум многообразий решеток V , для которых $\text{Con}(K) \subset V$ влечет модулярность решеток конгруэнтностей в многообразии K . В целом, как показал недавно С. В. Полин [78, 2A276], первая гипотеза Дея не верна. Этим же проблемам посвящена работа Фриза и Нейшна^{*43}, Дея^{*44}.

Фриз и Йонссон [77, 7A306] находят тождество (дезаргово), не следующее из модулярности, которое выполняется на всех решетках $\text{Con}(A)$ для алгебр A из многообразия алгебр с модулярными решетками конгруэнтностей. Сопоставим этот результат с полученным недавно А. В. Кузнецовым и И. С. Негру^{*45}: решетка конгруэнтностей универсальной алгебры с перестановочными конгруэнтностями всегда дезаргова. Медерли [75, 8A350] находит условие мальцевского типа для того, чтобы на каждой алгебре многообразия решетка конгруэнтностей удовлетворяла некоторым тождествам, в частности тождеству l -модулярности Левига: $(x \wedge y) \vee (x \vee z) = \vee x \wedge ((x \wedge y) \vee (z \wedge x) \vee (y \wedge z))$.

Пусть на всех алгебрах A многообразия решетка $\text{Con}(A)$ дистрибутивна. Тогда возникают полиномы $P_0, P_1, \dots, P_n$ (см. Йонссон [69, 9A208]). Падманабхан и Куэйкенбуш [74, 7A437] доказывают, что любое конечно базлируемое многообразие алгебр с операциями $P_0, P_1, \dots, P_n$ задается n тождествами, а любое конечно базлируемое многообразие алгебр с дистрибутивными и перестановочными конгруэнтностями задается одним тождеством. Бейкер [77, 12A327] получает следующий результат: если конечная алгебра A является элементом многообразия конечного типа, для всех алгебр которого решетка конгруэнтностей дистрибутивна, то алгебра A обладает конечным базисом тождеств. Вообще условия, при которых конечная алгебра обладает конечным базисом тождеств, рассматривал ранее Макдональд [74, 7A440, 75, 5A307], формулируя свои гипотезы на языке свойств решеток конгруэнтностей.

Маццанти [75, 4A352] продолжает исследования Магари

^{*42} Nation J.—AU, 1974, v. 4, p. 78—88.

^{*43} Freese R., Nation J.—AU, 1977, v. 7, p. 191—194.

^{*44} Day A. Contrib. Univ. Alg., Coll., Math. Soc. Janos Bolyai, 17, 1977, p. 57—71.

^{*45} 2-й Всесоюзн. симпозиум по теории полугрупп. Свердловск, 1978, с. 47.

[71, 11A330; 11A331], используя конечные алгебры с дистрибутивными решетками конгруэнтностей. Драшкови́чева [73, 10A273] применяет алгебры с дистрибутивными решетками конгруэнтностей для получения результатов о независимости многообразий. Жемберы [74, 4A249] использует для изучения некоторых свойств алгебр цепи конгруэнтностей. Матиссен^{*46} рассматривает конгруэнтности, определяемые специальным образом одной бинарной производной операцией, и образованную ими решетку. Изучаются алгебры, все конгруэнтности которых таковы, и классы таких алгебр.

Пусть K — нетривиальное многообразие унарных алгебр. Нейшен^{*47} показал, что для любого множества X решетка разбиений $\Pi(X)$ изоморфно вложима в решетку $\text{Con}(F(X))$, где $F(X)$ есть K -свободная алгебра над X . Отсюда следует, что решетки $\text{Con}(A)$ для $A \in K$ порождают многообразие всех решеток. Куэйкенбуш [76, 2A399] называет многообразие унарных алгебр полупростым, если в нем всякая подпрямо неразложимая алгебра является простой. Указывается ряд дополнительных свойств решеток $\text{Con}(A)$ для алгебр A из полупростого многообразия, все алгебры которого имеют дистрибутивную решетку конгруэнтностей.

В работе Барриса и Санкапанавара [76, 11A384] ставится проблема разрешимости теории решеток отношений конгруэнтности универсальной алгебры. В частности доказывается, что теория таких решеток для полурешеток рекурсивно неразличима, этот же результат получается для унарных алгебр счетного ранга. О работах, затрагивающих аналогичные вопросы для групп, сказано в предыдущем разделе.

Решетки различного вида конгруэнтностей на частичной алгебре изучают Войдыло [73, 11A307] и В. Т. Кулик [74, 3A420]. Берман^{*48} доказал, что решетки конгруэнтностей конечных алгебр и сильных конгруэнтностей конечных частичных алгебр дают один и тот же абстрактный класс решеток.

Отметим некоторые обобщения. Май Тран Дюк [76, 4A296, 5A312, 313] изучает решетку частичных конгруэнтностей (это значит, что рефлексивность не предполагается). Ю. М. Мовсисян вводит понятие обобщенного гомоморфизма алгебр и в связи с этим понятия обобщенной подалгебры и конгруэнтности, изучает их решетки [74, 3A371; 77, 3A268].

^{*46} Matthiessen G.—Contrib. Univ. Alg., 1977, p. 295—310.

^{*47} Nation J.—AU, 1974, v. 4, p. 132.

^{*48} Berman J. — AU. 1971, v. 1, p. 133—135.

Пасини [74, 11A372] продолжает изучать решетку всех классов всех отношений конгруэнтности на алгебре, в частности находит условие ее модулярности. В работе Хайды и Зелинки [77, 8A344] рассматривается решетка всех стабильных толерантностей на алгебре и доказывается, что она алгебраическая; эта же решетка для дистрибутивной решетки оказывается $\vee$ -бесконечно дистрибутивной. Фрода-Шехтер [77, 4A307] вводит понятие P -конгруэнтности для множества отношений P на множестве A и доказывает, что такие P -конгруэнтности образуют подрешетку решетки $E(A)$. Работа М. А. Дихтярь [74, 3A241] о конгруэнтностях частичных P -оперативов отражена в предыдущем обзоре [76, 10A202].

Перейдем к рассмотрению работ, посвященных решеткам конгруэнтностей конкретных алгебраических систем. Часть из них, в которых рассматриваются группы, кольца и модули, уже отражена в предыдущих разделах.

Радикалы в решетке конгруэнтностей мультиоператорной группы изучает Млитц [76, 2A402]. Миллер [76, 11A270] изучает эту решетку для прямого произведения конечного числа симметрических групп. Силкок^{*49} доказал, что всякая конечная дистрибутивная решетка изоморфна решетке нормальных подгрупп некоторой группы. Напомним, что для модулярных решеток это не так. Укажем на работу Херрманна и Хуна^{*50}, в которой изучаются такие решетки нормальных подгрупп группы, которые порождаются скелетами.

К. Каарли [75, 4A326] доказывает, что если решетка нормальных подгрупп аддитивной группы почти-кольца R с правой единицей является цепью, то R изоморфно кольцу вычетов Z_p^n , где p — простое число. В работе [76, 7A342] Чакань формулирует на языке решеток конгруэнтностей условие эквивалентности многообразия алгебр многообразию всех правых модулей над некоторым кольцом.

Особенно много работ посвящено аналогичным вопросам для полугрупп. Пусть S — регулярная полугруппа, μ — наибольшая конгруэнтность, разделяющая идемпотенты, а σ — наименьшая групповая конгруэнтность. Беард [73, 7A182] изучает решетки $[\Delta, \mu]$ и $[\sigma, S^2]$. Известно, что они модулярны. Автор ставит вопрос о модулярности их теоретико-множественного объединения. Ему удастся найти соответствующее условие в частном случае так называемых Θ -регулярных по-

^{*49} Silcock H. L.—AU, 1977, v. 7, p. 361—372.

^{*50} Herrmann Ch., Huhn A.—LT, p. 97—136.

лугрупп и уточнить этот результат для инверсных полугрупп. Пусть S — связка групп. $\text{Con}(S)$ называется в работе Шпитцнагеля [74, 2A173] θ -модулярной, если модулярный закон $q_1 \cap \tau = q_2 \cap \tau$, $p_1 \vee \tau = q_2 \vee \tau$, $q_1 \subset p_2 \Rightarrow q_1 = p_2$ выполняется для всех пар (q_1, q_2) , индуцирующих одно и то же отношение на множестве идемпотентов. Доказывается, что только в этом случае естественное в определенном смысле отображение решетки $\text{Con}(S)$ в решетку $B(S) \times M(S)$, где $B(S)$ — множество идемпотентных конгруэнтностей, а $M(S)$ — множество конгруэнтностей, разделяющих идемпотенты, есть решеточное вложение (см. также его работу [74, 5A198]).

Шейблих [73, 10A137] доказывает, что решетка конгруэнтностей симметрической инверсной полугруппы на множестве A изоморфна решетке конгруэнтностей полугруппы всех преобразований A и, следовательно, дистрибутивна. Опишем подробнее результат работы Фриза и Нейшена [74, 9A344], который уже упоминался выше. Доказано, что решетка конгруэнтностей конечной полурешетки $(S, \wedge)$ дуально изоморфна решетке всех подалгебр частичной алгебры $(S, \wedge, \vee, 0)$. Далее, если δ — нетривиальное решеточное тождество, то существует конечная полурешетка S такая, что δ не выполняется в решетке $\text{Con}(S)$. Отметим еще один результат этой работы. Если V — многообразие полугрупп S , для которых $\text{Con}(S)$ удовлетворяет некоторому нетривиальному решеточному тождеству, то V состоит из групп, экспоненты которых суть делители некоторого фиксированного числа.

Л. А. Скорняков^{*51} описывает полигоны A над коммутативными моноидами, для которых $\text{Con}(A)$ есть решетка с дополнениями. Г. И. Житомирский [74, 9A191] сводит задачу описания обобщенных групп (инверсных полугрупп) с булевой решеткой отношений конгруэнтности к соответствующей задаче для групп и антигрупп (фундаментальных инверсных полугрупп — в другой терминологии). Укажем один из результатов. Пусть S — обобщенная группа, в которой любые два элемента вида aa^{-1} и $a^{-1}a$ несравнимы или равны (класс таких полугрупп достаточно широк, он содержит все клиффордовы обобщенные группы и все обобщенные группы, множество идемпотентов которых удовлетворяет условию минимальности или максимальности для естественного порядка). $\text{Con}(S)$ булева тогда и только тогда, когда идемпотенты S образуют локально конечное дерево и S является идеальным расширением группы с булевой решеткой нормальных под-

^{*51} Skornjakov L. A. — LT, p. 395—412.

групп при помощи антигруппы или антигруппой с тривиальной групповой конгруэнтностью ($\sigma = S^2$). В другой своей работе [75, 11A251] он находит условие, при котором $\text{Con}(S)$ является цепью для бипростой обобщенной груды S . Ряд общих вопросов, связанных с решетками конгруэнтностей инверсных полугрупп, обсуждает Грин [76, 3A185], новых результатов эта работа не содержит.

Престон [76, 8A238] устанавливает соответствия между решеткой $\text{Con}(S)$ для полугруппы S и решеткой идеалов полугрупповой алгебры $R(S)$ над кольцом R с единицей. Из этих соответствий получается ряд результатов, в том числе фундаментальный результат Редди, характеризующий конгруэнтности на свободной конечно порожденной коммутативной полугруппе. Шайн [76, 8A248] уточняет свой результат, характеризующий цепи, изоморфные решеткам конгруэнтностей коммутативных полугрупп.

Специальные виды конгруэнтностей на полугруппе и их полурешетки рассматривает В. Н. Климов [76, 8A251]. В работе [77, 2A184] он вводит специальные отношения в решетке конгруэнтностей и изучает их свойства. Госеки [76, 12A203] изучает упорядоченное множество полурешеточных отношений конгруэнтности на полугруппе. Линдси и Медисон [76, 12A209] изучают решетку $\text{Con}(S)$ для полугруппы S Бэра—Леви (полугруппа всех взаимно однозначных преобразований множества X таких, что $|X \setminus \varphi(X)| = q$, а $|X| = p$, $q \leq p$, p и q фиксированы).

Д. М. Смирнов [77, 3A270] получает следующий результат: всякая решетка, дуальная решетке отношений конгруэнтности на полугруппе, вложима в решетку многообразий унарных алгебр.

Полугруппа называется экспоненциальной, если имеет место тождество $(xy)^n = x^n y^n$ для всех n . Троттер [77, 5A106] описывает экспоненциальные полугруппы, для которых решетка конгруэнтностей — цепь. Поскольку коммутативные полугруппы экспоненциальны, из этого описания должны получаться результаты Шайна и Тамуры, изложенные в предыдущем обзоре. Решетку разделяющих идемпотенты конгруэнтностей на ортодоксальной полугруппе изучает Фейгенбаум [77, 5A117]. В. Т. Кулик [74, 9A204] продолжает изучение решетки сильных конгруэнтностей на полугруппоиде и, в частности, на категории.

Остановимся на работах, в которых рассматриваются решетки конгруэнтностей на решетках. Работа Яновича [73,

9A292] примыкает к работе Икбалунисы [72, 1A501]. В ней выделяется класс решеток L со стоуновскими решетками $\text{Con}(L)$, включающий в себя ранее выделенные классы. Исбел [76, 8A398] рассматривает категорию K всех $\vee$ -непрерывных решеток. Решетка всех идеалов свободной решетки является K -решеткой. Решетка замкнутых конгруэнтностей K -решетки дистрибутивна и сама находится в K .

Янович [76, 12A378] находит условия, при которых решетка всех сохраняющих нуль конгруэнтностей в решетке с нулем будет булевой. Сформулируем два интересных результата Е. Т. Шмидта: 1) каждая конечная дистрибутивная решетка изоморфна решетке конгруэнтностей n -дистрибутивной решетки^{*52}; 2) для любой конечной дистрибутивной решетки L с одним дуальным атомом существует такая конечная решетка M длины 5, что $\text{Con}(M) \cong L$ [77, 2A373]. Последнее усиливает аналогичный результат Бермана^{*53} для цепей. Заметим также, что в упомянутой работе Бермана доказано, что если L — решетка, для которой $\text{Con}(L)$ есть булева алгебра порядка 2^n , то L имеет длину самое малое n .

Якубик^{*54} рассматривает пары решеток с совпадающими решетками конгруэнтностей. Это имеет связь со следующей задачей. Пусть L подрешетка решетки $E(A)$. Сколькими способами можно задать структуру M решетки на A , чтобы $L = \text{Con}(M)$?

Керубини [74, 4A234], Гамильтон [75, 2A350], Ниминен [75, 11A393; 77, 1A294] продолжают обсуждать различные вопросы, связанные со свойствами решеток конгруэнтностей на полурешетках, большей частью повторяя уже известные результаты.

Блок и Двингер [75, 12A291] рассматривают булеву алгебру с сигнатурной операцией аддитивного замыкания. Доказывается, что решетки конгруэнтностей такой алгебры и ее подалгебры, состоящей из всех замкнутых элементов, изоморфны. Франчи [76, 4A282] рассматривает такую же систему, но не требует идемпотентности и экстенсивности сигнатурой операции ϕ . Такую систему он называет ϕ -алгеброй. Доказывается, что решетки конгруэнтностей ϕ -алгебры изоморфна решетке ее ϕ -идеалов. Кёллер [76, 4A289] изучает так называемые алгебры Брауэра. Они образуют многообра-

*52 Schmidt E. T.—AU, 1974, v. 4, p. 49—57.

*53 Berman J.—AU, 1972, v. 2, p. 18—19.

*54 Jakubik J.—LT, p. 171—184.

зие, конгруэнтности на них перестановочны, а их решетки дистрибутивны.

В работе Чиньоли [76, 3A74] изучается решетка конгруэнтностей n -значных алгебр Лукасевича без инволюции. Кабзинский и Вронский [76, 3A66] занимаются тем же для «эквивалентной алгебры» $(A, \leftrightarrow)$ (аксиоматический фрагмент интуиционистской пропозициональной логики). Для нее решетка конгруэнтностей изоморфна решетке фильтров.

В. И. Колпаков [75, 2A365] указывает решетку конгруэнтностей для некоторых классов подалгебр монотонных функций в алгебрах Поста. В. Горлов [76, 9A114) строит графы решеток конгруэнтностей для замкнутых классов функций алгебры логики; для $k \geq 3$ он указывает замкнутый класс k -значных функций с бесконечным числом конгруэнтностей. И. А. Мальцев [77, 10A200] рассматривает итеративную алгебру Поста P_A m -местных функций из некоторого множества A в это же множество. Для подалгебр этой алгебры все конгруэнтности разбиваются на два класса: подарностные и внеарностные. Указывается строение решетки внеарностных конгруэнтностей. Для некоторых подалгебр алгебры P_A дается более полное описание решеток конгруэнтностей. Устанавливается связь между решеткой конгруэнтностей на основании алгебры и решеткой конгруэнтностей самой алгебры.

Катриняк [77, 2A351] занимается одной из проблем Гретцера и характеризует множество всех пар конгруэнтностей модулярной p -алгебры L , первые элементы которых суть конгруэнтности на наибольшей булевой подалгебре L , а вторые — конгруэнтности на модулярной подрешетке L , состоящей из всех элементов x , удовлетворяющих условию: $x^* = 0$. В другой работе*⁵⁵ он находит характеристику $\text{Con}(L)$ для дистрибутивной p -алгебры L : алгебраическая решетка A изоморфна $\text{Con}(L)$ для некоторой дистрибутивной p -алгебры L тогда и только тогда, когда V -полурешетка всех компактных элементов в A образует дуальную алгебру Гейтинга порядка 3.

Укажем на результаты Хенсаула [77, 10A198] относительно решеток конгруэнтностей квазиупорядоченных и упорядоченных множеств. Квазиупорядоченное множество A удовлетворяет условию максимальности тогда и только тогда, ког-

*⁵⁵ Katrinák T.—AU, 1977, v. 7, p. 265—272.

да $\text{Con}(A)$ атомарная решетка. Любая полная атомарная булева алгебра есть решетка конгруэнтностей некоторого квазиупорядоченного множества.

5. Решетки, связанные с топологическими пространствами

А. Г. Нетребин [74, 12A327] изучает решетку замкнутых подмножеств топологического пространства, он доказывает существование специального вида изоморфизмов этих решеток для нормальных пространств. Сафл, Беккенстейн, Наричи [77, 1A380] используют эту решетку для построения пополнения Джекобсона. Пусть X и Y — компактные топологические T_1 -пространства, F_1 и F_2 — предбазы их топологий из замкнутых множеств, замкнутые относительно конечных пересечений. Брауде [77, 10A331] доказывает, что если существует морфизм $\theta: F_1 \rightarrow F_2$, сохраняющий пересечение и пустое множество, то X и Y гомеоморфны. Флаксмайер [75, 4A572] рассматривает булевы алгебры канонических замкнутых подмножеств топологических пространств и их отображения, индуцированные непрерывными сюръекциями этих пространств. Глазек и Рудольф^{*56} доказывают, что всякая атомная дистрибутивная решетка изоморфна базе замкнутых подмножеств некоторого компактного T_0 -пространства. Здесь же они рассматривают специальные типы атомных дистрибутивных решеток, которые оказываются изоморфными решетке всех подмножеств некоторого множества.

Эда [76, 6A43] изучает булеву алгебру регулярных открытых подмножеств топологического пространства, связанного с данным упорядоченным множеством. Остановимся на работе Мартинеца [77, 5A217]. Решетка $O(X)$ открытых подмножеств топологического пространства X полупроста и брауэрова. Описываются все T_0 -пространства X , которые координатизируются решеткой L , то есть $L \cong O(X)$.

Гирц и Кеймел [77, 4A317] строят теорию представлений произвольной решетки подобно теории представлений Стоуна для булевых алгебр. Для этого рассматриваются компактные вполне несвязные частичные $\wedge$ -полурешетки, а представление строится с помощью их открыто-замкнутых фильтров. Льюкес [76, 11A389] применяет решетку подпространств специальным образом построенных топологических пространств для

^{*56} Glazek K., Rudolf L.—Acta Univ. Wratislav., 1973, N 188, p. 3—9.

изучения моделей, в частности показывается, что эта решетка антиизоморфна решетке универсальных классов монадических алгебр.

Пусть $Z(X)$ — решетка всех нульмножеств всех непрерывных вещественно-значных функций на топологическом пространстве X . Е. М. Вечтомов [77, 12A545] указывает случай, когда изоморфизм этих решеток влечет гомеоморфизм исходных пространств. Спид [74, 7A417] рассматривает решетку $Z(X)$, продолжая свою работу [69, 6A246] о кольцах множеств. Он находит условия, характеризующие эту решетку для компактных и произвольных топологических пространств X . В работе Баркера [73, 8A259] получены условия дистрибутивности, модулярности и полумодулярности решетки граней выпуклого замкнутого конуса в n -мерном арифметическом пространстве.

В. А. АРТАМОНОВ

РЕШЕТКИ МНОГООБРАЗИЙ

Настоящий обзор составлен по материалам, опубликованным в РЖ «Математика» с июля 1973 года по декабрь 1977 года, и непосредственно продолжает обзор В. Н. Салия [76, 10A201] по этой же теме и обзор автора [77, 6A234] «Универсальные алгебры». В рассматриваемый период помимо упомянутых появился ряд обзорных статей по алгебраическим системам, затрагивающих настоящую тему. Это препринт Тейлора «Эквациональная логика» (университет Колорадо, США, 1975), обзор Смита «Мальцевские многообразия» [77, 8A356], обзор автора «Решетки многообразий линейных алгебр» [78, 8A342]. Кроме того, в дополнение к списку монографий, указанных в [77, 6A234], вышла книга И. И. Валуца «Отображения. Алгебраические аспекты теории» [77, 4A325], где рассмотрена решетка многообразий унарных алгебр.

1. Если V — многообразие Ω -алгебр, то через $L(V)$ обозначается решетка подмногообразий в V . Аналогично, если U — квазимногообразие, то $L_q(U)$ — решетка подквазимногообразий в U . Напомним, что $L(V)$ дуально изоморфна решетке вербальных конгруэнций V -свободной алгебры счетного ранга, то есть $L(V)$ дуально изоморфна алгебраической решетке. Кроме того, $L(V)$ полна, и в ней есть минимальные

элементы (атомы). Из работы Фриза и Йонссона [77, 7A306] следует, что если $L(V)$ модулярна, то в ней выполнено дезаргово тождество. Решение вопроса о том, когда в решетке многообразий всех Ω -алгебр выполнено некоторое тождество, отражено в упомянутом выше обзоре В. Н. Салия. В работе А. Н. Трахтмана [74, 6A411] показано, что если многообразие V задано регулярными тождествами (то есть тождествами вида $\omega_1 = \omega_2$, где в ω_1 и ω_2 входят одни и те же переменные), то в V любое собственное подмногообразие имеет покрытие. Например, таким свойством обладают многообразия группоидов, n -полугрупп и т. д. Вместе с тем отмечается, что в решетке многообразий полугрупп существуют элементы, имеющие континуум покрывающих.

В. И. Игошин [75, 12A307] доказал, что если в $L(V)$, где V локально конечно, любой главный идеал имеет конечное число максимальных элементов, то каждое подмногообразие в V порождается конечной алгеброй. В частности, $L(V)$ не более, чем счетна. В качестве следствия получается, что каждое многообразие идемпотентных полугрупп порождается конечной полугруппой. Деем [76, 11A386] показано, что если V — локально конечное многообразие с дистрибутивными решетками конгруэнций, то $L(V)$ бесконечно дистрибутивна.

Разрешимость теории $L(V)$, где V — многообразие всех Ω -алгебр, рассмотрена в работе Барриса и Санкаппанавара [76, 11A384]. Минимальным локально конечным многообразиям с перестановочными конгруэнциями посвящен обзор Смита [77, 8A356] (Маккензи [78, 11A378], Гумм [79, 8A331], Хагеман и Херрман [79, 12A341] исправили найденные в нем ошибки). Любое такое многообразие порождается своей плейн-алгеброй, то есть конечной простой алгеброй, которая может иметь только одноэлементные подалгебры. Обратно, если A — плейн-алгебра и многообразие V , порожденное A , имеет перестановочные конгруэнции, то имеются две возможности. Если V минимально, то декартовы степени A^t , $t = 0, 1, 2, \dots$, являются единственными конечными V -алгебрами. Если же V не минимально, то A не имеет подалгебр, отличных от A , но существует такая фактор-алгебра B алгебры A^2 , что порядок B совпадает с порядком A и B является плейн-алгеброй, порождающей единственное собственное подмногообразие в V . Таким образом, в этом случае $L(V)$ является трехэлементной цепью. Более того, каждая конечная V -алгебра имеет, и притом единственное, представление в виде прямого произведения $A^t \times B^n$, где $t, n \geq 0$.

В последнее время возрос интерес к изучению решетки подквазимногообразий $L_q(U)$ квазимногообразия U алгебраических систем. А. И. Будкин и В. А. Горбунов [75, 12A308] показали, что $L_q(U)$ конечна тогда и только тогда, когда в этой решетке выполнены условия обрыва возрастающих и убывающих цепей. Если U локально конечное квазимногообразие систем конечной сигнатуры, то $L_q(U)$ конечна в том и только в том случае, когда U порождается конечной системой (В. А. Горбунов [77, 8A358]). Решетка $L_q(U)$ модулярна тогда и только тогда, когда она дистрибутивна [75, 12A308]. Дистрибутивность $L_q(U)$ эквивалентна тому, что в нее не вложима некоторая фиксированная 7-элементная решетка [77, 8A358]. Решетка $L_q(U)$ дистрибутивна, если в U любая конечно порожденная подпрямо неразложимая система проективна [77, 8A358]. В любой решетке $L_q(U)$ выполнено квазитождество

$$\forall(x, y, z) (x \vee y = x \vee z \rightarrow x \vee y = x \vee (y \wedge z)).$$

Выполнимость в $L_q(U)$ двойственного квазитождества эквивалентна тому, что $L_q(U)$ является решеткой с псевдодополнениями [77, 8A358]. Если $L_q(U)$ с относительными дополнениями, то $L_q(U)$ булева алгебра [77, 8A358]. В совместной работе А. И. Будкина и В. А. Горбунова [76, 5A315] доказано отсутствие максимальных элементов в $L_q(U)$ для некоторых квазимногообразий, в частности для групп. Если Ω содержит либо операции ариности не меньше 2, либо две унарные операции, то в решетке всех квазимногообразий Ω -алгебр любой неединичный фильтр континуален. Последним свойством обладают также решетки всех квазимногообразий луп и квазигрупп.

Шафаат [76, 6A217] доказал существование континуума минимальных квазимногообразий группоидов. В. А. Горбуновым (Сообщения XIV Всесоюзной алгебраической конференции. Новосибирск, 1977, т. 2, с. 94) построен пример 3-элементной бесконечнобазлируемой алгебры A с двумя унарными операциями. При этом A вложима в такую 4-элементную алгебру $\bar{A}$, что для некоторого локально конечного многообразия V , содержащего $\bar{A}$, квазимногообразие, порожденное $\bar{A}$, не имеет в $L_q(V)$ покрытия, в то время как V является единственным покрытием квазимногообразия, порожденного A .

Перейдем теперь к решеткам многообразий различных конкретных классов универсальных алгебр, из которых остановимся на линейных алгебрах, группах, полугруппах и др.

2. Отметим кратко результаты по решеткам многообразий линейных алгебр. Автор [74, 1A314; 75, 5A312; 77, 6A220] описаны многообразия V линейных k -алгебр над нетеровым кольцом k с $L(V)$, являющейся цепью, при следующих условиях: 1) V резидуально нильпотентно (что всегда выполнено, если k — бесконечное поле), 2) V — многообразие альтернативных алгебр, 3) V — многообразие (γ, δ) -алгебр, $\frac{1}{30} \in k$; 4) V — многообразие йордановых алгебр, $\frac{1}{2} \in k$; 5) V — многообра-

зие ограниченных p -алгебр Ли, в котором свободные алгебры ранга 3 аппроксимируются разрешимыми алгебрами Ли.

Г. В. Шеина (Вестник МГУ, 1977, № 5) описала цепные многообразия метабелевых A -алгебр Ли, то есть метабелевы многообразия, в которых все нильпотентные алгебры абелевы. Ею показано, что в отличие от групп решетка таких многообразий алгебр Ли не дистрибутивна. Ю. А. Бахтурин [75, 11A381] описал решетку подмногообразий метабелевых алгебр Ли над бесконечным полем и доказал ее дистрибутивность. В [75, 9A230] Ю. А. Бахтуриным и А. Ю. Олшанским показано, что многообразие, порожденное конечной алгеброй Ли, кроссово, то есть оно наследственно конечно базируемо и имеет конечное число подмногообразий. В [76, 12A373] ими же описаны почти кроссовы многообразия разрешимых алгебр Ли над конечным полем, то есть некроссовы многообразия, у которых все собственные подмногообразия кроссовы. Оказалось, что над каждым конечным полем существует только одно такое многообразие, оно метабелево и цепное. Кроссовы и почти кроссовы многообразия ассоциативных колец описаны И. В. Львовым [74, 5A292, 11A316].

Многообразие алгебр V называется предполным, если V содержит лишь один атом. Сундарараман [76, 1A288, 11A341] описал предполные многообразия k -алгебр над произвольным коммутативно - ассоциативным кольцом k . Мекеем (Сообщения XIV Всесоюзной алгебраической конференции. Новосибирск, 1977, т. 1, с. 60—61) изучены многообразия ассоциативных колец V при условии, что в $L(V)$ любая цепь имеет длину 2. Многообразия ассоциативных k -алгебр над полем k характеристики 0, у которых решетка $L(V)$ дистрибутивна, описали А. З. Ананьин и А. Р. Кемер [77, 2A306]. Именно, получаются многообразия, в которых $\alpha[x, y]y + \beta y[x, y] = 0$, где $\alpha, \beta \in k$, причем $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$.

Интересна серия работ Г. В. Дорофеева [77, 3A231, 11A303], где показано, что многообразие стандартных алгебр есть объединение многообразий йордановых и ассоциативных алгебр, многообразие обобщенно стандартных алгебр есть объединение многообразий стандартных и альтернативных алгебр, многообразие достижимых алгебр оказывается объединением многообразий коммутативных и стандартных алгебр. В решетке многообразий линейных алгебр описаны подрешетки, порожденные многообразиями коммутативных и альтернативных алгебр, а также многообразиями коммутативных, антикоммутативных и ассоциативных алгебр.

С. В. Полин [77, 4A287] построил пример конечной алгебры с бесконечным базисом тождеств. В. П. Белкин [77, 11A320] указал пример бесконечно базлируемого многообразия правоальтернативных алгебр. Воэн-Ли построил пример бесконечно базлируемого многообразия AN_2 -алгебр Ли над полем характеристики 2. С другой стороны, Г. В. Шеина [76, 7A347] показала, что над полем характеристики, отличной от 2, многообразие алгебр Ли $N_c A \wedge N_2 N_c$ наследственно конечно базлируемо.

М. В. Волков (III Всесоюзный симпозиум по кольцам, алгебрам и модулям. Кяэрику, 1976. Сообщения, с. 23—24) показал, что над нетеровым коммутативно-ассоциативным кольцом любое многообразие, заданное полиоднородными тождествами, обладает покрывающими многообразиями (см. также работу А. С. Аракеляна [77, 9A368]). Решетка многообразий решеточно упорядоченных групп и алгебр Ли рассмотрена Н. Я. Медведевым [77, 11A313].

3. Перейдем к работам по решеткам многообразий групп. Ньюмен [74, 9A230] исследовал вопрос о разложимости в объединение многообразий групп, у которых n -порожденные группы нильпотентны класса не выше m . В работе Гупты, Левина, Ремтулы [74, 9A231] с каждым многообразием групп V связывается многообразие $V^{(n)}$, в котором все n -порожденные группы лежат в V . Изучена цепь $V^{(1)} \supset V^{(2)} \supset \dots \subset V^{(n)}$ в предположении, что $V^{(n)} = V$. Если $V = N_c$, $c \geq 3$, то за исключением $V^{(c)} = V^{(c+1)} = V$ все остальные включения строгие. Рассмотрены также случаи $V = N_c A$, $AN_c \wedge N_6$, AN_c и др. Харрис [75, 2A271] показал, что решетка $L(UV)$ дистрибутивна, если U и V — локально конечные многообразия взаимно простых экспонент, причем U — многообразие A -групп, а решетка $L(V)$ дистрибутивна.

А. А. Клячко [75, 7A319] описал в решетке многообразий групп интервал $[N_{c, p^a}, N_{c+1, p^a}]$ при $c < p$, где N_{c, p^a} —

многообразие нильпотентных групп класса не выше c и экспоненты, делящей p^a . Обзор результатов по многообразиям метабелевых групп приведен в [75, 7A320]. Ормерод [75, 8A265] показала, что решетка $L(A_2 A_4 \wedge N_6)$ недистрибутивна. Брайсом [76, 8A312] рассмотрена решетка подмногообразий в центрально-абелевых-наднильпотентное многообразиях групп.

Автором (Тр. Семинара им. И. Г. Петровского, 1977, № 3) описаны многообразия групп V , у которых $L(V)$ — цепь, в предположении, что V -свободные группы ранга 4 аппроксимируются разрешимыми группами. Если V не является нильпотентным класса ≤ 4 , то либо $V \subset A_2^2$, либо $\exp V = p > 3$ просто и V — многообразие 3-энгелевых или многообразие метабелевых групп.

Скримджер [76, 12A301] построил в решетке многообразий решеточно упорядоченных групп покрытия многообразий абелевых групп. О решетках многообразий упорядоченных групп имеются работы Мартинеца [75, 3A305] и Н. Я. Медведева [77, 11A313].

4. Обширна литература по решеткам многообразий полугрупп. Баррис и Нельсон [73, 10A126] показали, что решетка разбиений множества из m элементов дуально изоморфна под решетке решетки многообразий коммутативных полугрупп. Поэтому эта последняя решетка не удовлетворяет никакому специальному решеточному тождеству. Решетка разбиений счетного множества уже не обладает указанным вложением. Ежек [77, 9A349] показал, что решетка многообразий полугрупп с тождеством $x^2 y = y x^2 = x^2$ содержит интервал, дуально изоморфный решетке разбиений счетного множества. И. И. Мельник [74, 3A113, 114] изучал регулярные замыкания $R(V)$ многообразий полугрупп V . Если в V выполнено тождество вида $f(x, y) = x$, то $R(V)$ состоит из жестких коммутативных связок V -полугрупп. В общем случае $R(V)$ состоит из указанных полугрупп тогда и только тогда, когда в V выполнены тождества $x y = x^n y = x y^n$ для некоторого n . Им же в [75, 3A217] в решетке $L(V)$ рассмотрена операция мажорантного сдвига.

А. Я. Айзенштат [74, 11A195; 77, 11A200] изучала решетку многообразий полугрупп, содержащих фиксированное множество минимальных многообразий. Отмечено, что многообразие, содержащие единственный атом — многообразие, опре-

деленное тождеством $xy=zt$, все являются многообразиями нильполугрупп. Если многообразие полугрупп не содержит других атомов, кроме многообразий, заданных тождествами $xy=zt$ и $xy=x$, то в нем выполнено тождество $x^n y=x^n$. Если L_1 — решетка многообразий, в которых для любой полугруппы A и любых $x, y \in A$ выполнено $x^n y=x^n$, где $n=n(x, y)$, а L_2 — решетка многообразий нильполугрупп, то L_2 — идеал в L_1 . Более того, L_1 и L_2 имеют одинаковую мощность. В обеих решетках найдены конечные решетки вида $L(V)$ для некоторого V .

Если B — многообразие полугрупп, заданное тождеством $xyzxy=xy$, S — многообразие всех полурешеток, G_n — многообразие всех n -групп, то для $V_1 \subset B$, $V_2 \subset G_n$, $V_3 \subset S$ справедливо $L(V_1 \vee V_2 \vee V_3) \cong L(V_1) \times L(V_2) \times L(V_3)$ (Петрич, [74, 11A203]). Предполные многообразия полугрупп V (когда V содержит один атом) списаны Субраманьяном и Сундарараманом [75, 3A216]. Оказалось, что это либо минимальные многообразия идемпотентных полугрупп (полурешетки, полугруппы левых и правых нулей), либо многообразия нильполугрупп, либо многообразия групп примарной экспоненты. А. Н. Трахтман [75, 4A186] показал, что если V — многообразие полугрупп идемпотентов, то многообразия, покрывающие V , — это в точности многообразия, порожденные V и произвольной полугруппой $\Gamma \notin V$, все собственные подполугруппы которой лежат в V . В [77, 11A201] им построен пример многообразия полугрупп, не имеющего покрывающих. В [77, 12A148] описаны решетки подмногообразий многообразия, порожденного всеми полугруппами Брандта. Свойства решетки квазимногообразий упорядоченных полугрупп исследовал У. К. Куспанов [75, 4A184]. Атомы решетки тождественно включительных многообразий рассмотрены Е. С. Ляпиным [76, 5A178].

Пусть C — класс всех полугрупп, являющихся объединениями групп, причем в этих полугруппах идемпотенты образуют подполугруппу и сами полугруппы являются связками групп. Петрич [76, 3A188] показал, что C — многообразие и $L(C) \cong L(G) \times L(B)$, где G — многообразие групп, B — многообразие всех идемпотентных полугрупп. Е. И. Клейман [77, 2A180] рассмотрел решетку $L(V)$ для многообразия V инверсных полугрупп. Показано, что отображения $U \rightarrow U \wedge G$, $U \rightarrow U \vee G$, где G — многообразие групп, являются эндоморфизмами решетки $L(V)$. Подрешетка, состоящая из многообразий $U \in L(V)$, имеющих с G тривиальное пересечение,

вкладывается в решетку многообразий, имеющих с G фиксированное пересечение. Более того (Сообщения XIV Всесоюзной алгебраической конференции. Новосибирск, 1977, т. 1, с. 92—92), последние решетки не удовлетворяют условию минимальности. Аналогично, решетка подмногообразий многообразия, порожденного конечной инверсной полугруппой, может не удовлетворять условию минимальности.

5. Остановимся теперь на решетках многообразий других алгебраических систем. Воэн-Ли (Препринт, Оксфорд, 1977) построил пример конечной лупы с бесконечным базисом тождеств. А. Д. Больбот [73, 11A229] указал континуум минимальных многообразий квазигрупп. Ежеком и Кепкой^{*1} изучена решетка многообразий абелевых (в смысле А. Г. Куроша) квазигрупп, то есть квазигрупп, в которых $(xy)(zt) = (xz)(yt)$. Описаны минимальные многообразия таких квазигрупп. Все они локально конечны. Описана решетка многообразий коммутативных абелевых квазигрупп с тождеством $x(y(zt)) = z(y(tx))$. Кроме того, дано описание решетки многообразий тотально симметричных абелевых квазигрупп, коммутативных унипотентных абелевых квазигрупп, коммутативных идемпотентных квазигрупп. Ими же [76, 12A147] описана решетка многообразий коммутативных идемпотентных абелевых группоидов и коммутативных абелевых группоидов с тождеством $x(yz) = (xy)(xz)$. Немец^{*2} показал, что решетка многообразий дистрибутивных группоидов не модулярна и имеет счетное число атомов. Решетка многообразий коммутативных абелевых дистрибутивных группоидов дистрибутивна и счетна. Решетка многообразий дистрибутивных полугрупп не модулярна и состоит из 36 элементов.

Куэйкенбуш [77, 8A284] изучал многообразия квазигрупп и луп Штейнера, которые задаются соответственно тождествами $x^2 = x$, $xy = yx$, $x(xy) = y$ и $x^2 = 1$, $xy = yx$, $x(xy) = y$. Показано, что в них существуют единственные минимальные многообразия, которые порождаются соответственно алгебрами $(F_3, x - y)$ и $(F_2, x + y)$. Ежек [77, 9A349] рассмотрел алгебру A , заданную на множестве натуральных чисел со счетным множеством унарных операций. Показано, что решетка, дуальная решетке конгруэнций A , вкладывается в качестве интервала в решетку многообразий группоидов с тождествами

^{*1} Jezek J., Kepk T.— Czech. Math. J., 1977, v. 27. p. 473—503.

^{*2} Nemez P. M.— LT, 1976, p. 172—181.

$((xy)(zt))u = u((xy)(zt)) = (xy)(zt)$. Описаны интервалы решеток многообразий Ω -алгебр, где Ω не более чем счетно и содержит либо одну бинарную, либо две унарных операции. А. И. Будкин [74, 6A409] показал, что множество шрейеровых многообразий алгебр с двумя унарными операциями континуально. Д. М. Смирновым [77, 3A270] показано, что решетка, дуальная решетке конгруэнций любой полугруппы, вложима в решетку подмногообразий некоторого многообразия унарных алгебр. Многообразиям унарных алгебр посвящена также книга И. И. Валуца [77, 4A235]. Решетки регулярно определяемых многообразий унарных алгебр исследованы Д. М. Смирновым (Сообщения XIV Всесоюзной алгебраической конференции. Новосибирск, 1977, т. 2, с. 120—121). Решетки квазимногообразий унаров (алгебр с одной унарной операцией) изучались В. К. Карташевым (Сообщения XIV Всесоюзной алгебраической конференции. Новосибирск, 1977, т. 2, с. 102).

А. М. Гасанов [75, 7A258] описал решетку многообразий коммутативных идемпотентных n -полугрупп. Она конечна и состоит из $2d$ элементов, где d число делителей $n-1$. Решетка многообразий n -полугрупп рассмотрена также Пейджем и Батсоном^{*3} (см. также работу Пейджа [76, 4A147]). Автором описаны все минимальные многообразия n -групп и (m, n) -колец. Все они локально конечны.

В. П. Белкиным [76, 12A379] показано, что любой неединичный фильтр в решетке квазимногообразий канторовых алгебр $A_{1,n}$, $n \geq 2$, континуален. В. В. Николенко [76, 7A99] описал решетку многообразий введенных им 0-циклических алгебр, близких к решеткам.

Известно, что многообразия дистрибутивных p -алгебр (дистрибутивных решеток с псевдодополнениями) образуют счетную цепь (см., например, упомянутый выше обзор Тейлора). И. В. Витенько и В. В. Николенко [74, 11A362] нашли критерий распознавания, в каком члене этой цепи лежит данная конечная дистрибутивная p -алгебра. Катриняк [74, 11A363] описал некоторые подрешетки в решетке многообразий модулярных p -алгебр. В [75, 5A300] им показано существование континуума многообразий модулярных p -алгебр. По поводу решетки многообразий двойных дистрибутивных p -алгебр пишет Романовская [77, 12A298]. В статье [74, 3A228] Катри-

^{*3} Page W. F., Butson A. T.—AU, 1973, v. 3, p. 112—126.

няк изучил решетку многообразий S -алгебр, то есть решеток с 0 и 1 и операцией взятия псевдодополнения x^* , причем $x^* \vee x^{**} = 1$. Показано, что решетка многообразий S -алгебр изоморфна собственной подрешетке решетки многообразий модулярных S -алгебр. Эта последняя решетка континуальна. Решетку многообразий монадических алгебр Поста порядка m рассмотрела Марчья [74, 8A89]. Л. Л. Максимова [75, 10A91] показала, что решетка многообразий топологических булевых алгебр дуально изоморфна решетке модальных логик, содержащих $S4$. В [76, 8A403] Хун строит новые примеры многообразий модулярных решеток, не порождаемых своими конечными членами, и многообразий, имеющих бесконечно много покрывающих многообразий. Решетка многообразий MV -алгебр (обобщенных алгебр Лукасевича), порождаемых своими конечными членами, описана Р. Григолиа [76, 3A75].

С. А. ЛИБЕР

ТОПОЛОГИЯ И ПОРЯДОК

Обзор охватывает 200 работ по топологическим упорядоченным пространствам, топологическим полурешеткам и решеткам, а также нечетким топологическим пространствам, которые были прореферированы в РЖ «Математика» за период с июля 1973 по декабрь 1977 года; он примыкает к соответствующей статье Г. И. Житомирского [76, 10A202]. Иные работы упомянуты в виде исключения. В обзоре не рассматриваются решетки топологий пространств и топологических алгебраических систем, решетки расширений топологических пространств, решетки открытых либо замкнутых множеств, топологические булевы алгебры. Эти вопросы освещаются другими авторами сборника.

Различные вопросы отражаются в обзоре с неодинаковой полнотой. Более подробно освещены основные направления исследований, к которым относятся работы по компактным упорядоченным пространствам, решеткам и полурешеткам и, в частности, по компактным полурешеткам Лоусона. Последним посвящены книги Хофмана и Стралки [77, 6A230], Хофмана, Мислава и Стралки [77, 2A194K; 75, 1A354K]. Попутно отметим здесь книгу Кока [74, 9A594K] по связным упорядоченным пространствам.

Топологии, ассоциированные с упорядоченными множест-

вами, продолжают служить источниками новых примеров. Карпинтеро [76, 8A633; 634] построил линейно упорядоченное множество без скачков и щелей, любые два различных интервала которого имеют различные порядковые типы. Снабженное максимальным и минимальным элементами и интервальной топологией, оно дает пример связного и локально связного пространства с единственным гомеоморфизмом на себя — тождественным. Пирсон [75, 6A622] построил дугу, то есть линейно упорядоченный континуум, никакие две поддуги в котором не гомеоморфны.

Пара топологических пространств X и Y называется жесткой, если всякое непрерывное отображение X в Y и Y в X постоянно. Семейство топологических пространств называется жестким, если любые два различных элемента семейства образуют жесткую пару. В ответ на один вопрос Миллера Б. А. Ефимов [76, 5A480] и Поточный [76, 5A493] построили жесткое семейство, состоящее из n дуг.

Топологии, порожденные квазипорядком и семейством квазипорядков, изучал Карлсон [76, 11A559]. Он доказал, что любая топология определяется семейством квазипорядков. Новую внутреннюю топологию упорядоченного множества, которая, вообще говоря, не совпадает с интервальной, определил Редфилд [77, 8A520; 76, 4A285]. Однако для почти полярно плотных модулярных решеток они совпадают*¹.

Лопес [74, 9A532] дал характеристику порядковой топологии полного порядка. Лоусон [73, 9A293] выяснял свойства интервальной, порядковой и выпукло-порядковой топологии решетки и полурешетки и доказал, что топология компактной полурешетки определяется ее алгебраической структурой. Он сравнивал также внутренние топологии и критерии сходимости в топологических решетках*².

Миллер [76, 1A568] рассматривал пополнения упорядоченных топологических пространств с интервальной топологией. Черути [73, 7A479] ввел на квазиупорядоченном множестве новую топологию, которая совпадает с интервальной для линейного порядка. Новую внутреннюю топологию цепи определил Жижович [75, 11A508].

Базу стрелочной топологии составляют полуоткрытые интервалы вида $[a, b)$. Кеннан [76, 3A449] доказал, что компактные подпространства цепи со стрелочной топологией яв-

*¹ Redfield R. H. — Canad. Math. Bull., 1975, v. 18, N 2. p. 255—261.

*² Lawson J. — HLT, p. 206—260.

ляются вполне упорядоченными. Эспели и Джозеф [77, 8A510] характеризуют компактные подмножества вещественной прямой в стрелочной топологии как замкнутые в этой топологии ограниченные подмножества, в которых нет строго возрастающих последовательностей. Стрелочную топологию рассматривали Грюнхейдж [73, 12A427], Мейер [74, 2A427], Рийкос [74, 2A454], Бейд [75, 4A569], Ольстер [76, 2A590].

Монжарде [77, 12A292] определил метрику на упорядоченных множествах конечного диаметра. Внутренние топологии рассматривали Капек [75, 3A526], Партра [77, 9A560].

Ряд авторов рассматривали проблему упорядочиваемости пространства. Пространство называется упорядочиваемым, если его топология является интервальной топологией подходящего линейного порядка, и упорядочиваемым по Эйленбергу, если интервальная топология слабее исходной. Дален [75, 1A530; 12A465], Дален и Ваттель [74, 9A531] в терминах открытой предбазы дали необходимые и достаточные условия того, что пространство гомеоморфно линейно упорядоченному пространству, связному линейно упорядоченному пространству, произведению линейно упорядоченных пространств и т. п. Например, пространство X гомеоморфно подпространству линейно упорядоченного пространства, если X имеет открытую предбазу, состоящую из двух гнезд. Кок [74, 9A594K] в своей диссертации предложил ряд иных условий упорядочиваемости для связных T_1 -пространств. Лопес [77, 8A499] доказал, что на множестве ординалов $[0, \omega_1]$ не существует такой регулярной топологии, которая была бы строго больше порядковой на $[0, \omega_1]$ и в которой точка ω_1 не была бы изолированной. Условия упорядочиваемости чеховской компактификации пространства нашел Пьюриш [74, 6A595].

Упорядоченные пространства. Если на хаусдорфовом топологическом пространстве имеется замкнутое отношение порядка, пространство называется упорядоченным. Иное согласование топологии и порядка предложил Аднаджевич [74, 8A397].

Фейбер [76, 1A586; 75, 1A520] дал необходимые и достаточные условия метризуемости линейно упорядоченных пространств и их подпространств, называемых обобщенными упорядоченными пространствами. Для последних доказано, что 1) сепарабельность эквивалентна наследственной сепарабельности, 2) наследственная финальная компактность эквивалентна тому, что всякое относительно дискретное подмножество не более чем счетно, 3) совершенная нормальность вле-

чет паракомпактность. Пирсон [76, 12A562] доказал, что произвольный упорядоченный континуум $X=[a, b]$ метризуем тогда и только тогда, когда в произведении $X \times I$ существует подконтинуум, соединяющий $\{a\} \times I$ и $\{b\} \times I$ и не содержащий никакого нетривиального горизонтального подконтинуума. Обобщения метризуемости линейно упорядоченных пространств изучали Недев и М. М. Чобан [75, 3A535; 12A482]. Г. И. Чертанов [74, 5A518] получил ряд результатов о топологических пространствах, соабсолютных с линейно упорядоченными. Например, всякое диадическое пространство, соабсолютное с линейно упорядоченным пространством, метризуемо и имеет счетный вес.

С. А. Перегудов [77, 2A549] дал критерий паракомпактности линейно упорядоченного пространства. Энгелькинг и Лютцер [77, 10A327] исследуют вопрос о паракомпактности обобщенного упорядоченного пространства, то есть линейно упорядоченного множества, на котором задана T_1 -топология с открытой базой выпуклых множеств. Вильямс [76, 10A289] изучал вопрос о паракомпактности произведения паракомпактного пространства X на паракомпактное упорядоченное пространство Y . Осташевский [75, 3A531] доказал, что лексикографическое произведение упорядоченных паракомпактных пространств паракомпактно. Ольстер [75, 9A384] рассмотрел вопрос о субпаракомпактности произведения обобщенно линейно упорядоченных пространств. Лютцер [75, 4A537] дал отрицательный ответ на вопрос: всякое ли непаракомпактное упорядоченное пространство с первой аксиомой счетности содержит в качестве подпространства пространство всех счетных порядковых чисел. Он также привел новый критерий паракомпактности упорядоченных пространств.

Компактное упорядоченное пространство Y называется компактификацией упорядоченного пространства X , если задано вложение в смысле топологии и порядка X в Y и образ X является топологически всюду плотным в Y . Блеттер [77, 9A559; 75, 7A634] дал необходимые и достаточные условия существования максимальной компактификации, а в частных случаях — минимальной компактификации и единственности компактификации линейно упорядоченного пространства. Самостоятельный интерес представляет аппарат: замкнутые подалгебры алгебры непрерывных ограниченных возрастающих вещественных функций на упорядоченном пространстве. Подход к описанию максимальной компактификации на языке фильтров предложил Чоу и Хонг [77, 9A568]. Компактифика-

ции линейно упорядоченного пространства X , заданного вместе с группой сохраняющих порядок отображений X на себя, изучал Девис [75, 11А511]. О компактификациях древовидных пространств будет сказано ниже.

Деревом называется континуум, в котором каждая пара различных точек может быть разделена третьей точкой. При изучении деревьев, древовидных пространств, дендритов и родственных понятий широко применяется разделяющий частичный порядок. Фиксируем любую точку a пространства X и положим $x \leq y$, если x разделяет точки a , y или $x = y$ или $x = a$. Получим разделяющий порядок пространства. Уорд [76, 7А635] предложил обзор свойств древовидных пространств на языке разделяющего порядка. Древовидные компактификации древовидных пространств изучали Пирсон [74, 3А370] и Аллен [76, 4А483].

Континуум с линейным разделяющим порядком называется дугой. Пространство называется сетевидным, если всякие две точки в нем разделяются конечным подмножеством. В. В. Произволов [74, 7А649] доказал, что сетевидный компакт линейно связан, то есть любые две его точки соединяются дугой.

Ряд авторов обобщали теорему Хана — Мазуркевича о непрерывных образах отрезка, в которой утверждается, что для метрического континуума M следующие условия равносильны: 1) M является континуумом Пеано, 2) M является непрерывным образом отрезка, 3) M аппроксимируется последовательностью конечных дендритов. Уорд [76, 11А549] доказал, что конечно периферический континуум является непрерывным образом дуги. Корнетт [76, 6А627] доказал, что локально связный континуум является непрерывным образом дуги тогда и только тогда, когда каждый его циклический элемент есть непрерывный образ дуги. Е. Д. Халимский [76, 6А508] установил, что всякое компактное линейно древовидное пространство является непрерывным образом дуги. Уорд [77, 7А476] показал, что континуум, аппроксимируемый конечными деревьями, есть непрерывный образ дуги.

Метрические компоненты в непрерывных образах упорядоченного континуума изучал Саймон [77, 9А595]. Автор нашел достаточные условия того, что сетевидный континуум является непрерывным образом упорядоченного. Пирсон [75, 7А654] и независимо Брауэр [75, 7А646] в ответ на один вопрос В. В. Произволова [70, 4А437] доказали, что всякий древовидный континуум является непрерывным образом дуги. Обобщая этот результат, Пирсон [76, 8А668] доказал, что

каждый сетевидный континуум есть непрерывный образ дуги.

Мюнценбергер и Смитсон [76, 5A184; 74, 10A412; 74, 9A583; 75, 2A529; 8A491] рассматривали полудеревья как упорядоченные множества специального вида. Разделяющий порядок привлекали Лам [74, 8A417; 76, 6A505; 9A482], Горд и Лам [77, 7A477], Смитсон и Уорд [73, 6A544], Беннет [74, 2A434], Джоуб [76, 5A503], Пирсон [75, 1A548].

Произведения линейно упорядоченных пространств изучал Г. И. Чертанов [76, 1A566]. Им доказано, что в классе экстремально несвязных компактов только конечные являются образами произведений линейно упорядоченных пространств при непрерывных замкнутых отображениях. Леман [75, 2A522] нашел, что произведение любого множества дугообразно связных пространств дугообразно связно. Макартур [73, 11A436] изучал равенство $v(X \times Y) = vX \times vY$ в случае, когда один или оба из сомножителей X и Y являются упорядоченными пространствами, а vX — расширение Хьюита пространства X . Г. И. Чертанов [76, 12A561] доказал, что если счетно компактное обобщенно упорядоченное пространство можно непрерывно отобразить на произведение двух бесконечных пространств, то они являются метрическими компактами.

Проективные объекты в категории линейно упорядоченных пространств и сохраняющих порядок непрерывных замкнутых отображений нашел Пьюриш [76, 6A487]. Ими оказались упорядоченные абсолюты, существование которых доказал В. В. Федорчук [69, 5A375]. При этом проекция упорядоченного абсолюта αX на X является проективным покрытием X в указанной категории. Гарсиа [76, 2A415] выделил подкатегории категории всех упорядоченных пространств, в которых каждый объект имеет проективное покрытие, и описал проективные и инъективные объекты некоторых категорий упорядоченных пространств.

С. П. Гулько и А. В. Оськин [75, 7A629], а также С. В. Кисляков [75, 77B732] дали полную классификацию пространств непрерывных функций на вполне упорядоченных компактах.

Равномерные упорядоченные пространства ввел Димитриевич [77, 1A467]. Он доказал, что произведение равномерно упорядоченных пространств является равномерно упорядоченным пространством. Редфилд [76, 12A567; 75, 1A521] изучал вопрос о возможности продолжения линейного порядка, определенного на равномерном пространстве, до линейного порядка на равномерном пополнении пространства.

Квазиупорядоченные пространства локальной близости ввели и изучали М. Сингал и Сандер [76, 8A623]. Их обобщение — синтопогенные квазиупорядоченные пространства введены Берджесом и Фитцпатриком [76, 12A584]. Сингал и Сандер [77, 11A451] обобщили результаты Ю. М. Смирнова о близостях для квазиблизости в смысле Первина.

Битопологические упорядоченные пространства рассматривали М. Сингал и А. Сингал [74, 1A465]. Рагхаван [77, 9A564; 76, 8A646] изучал монотонные непрерывные действительные функции на упорядоченном битопологическом пространстве и получил аналог теоремы Титце. Битопологические упорядоченные пространства, в которых одна из двух топологий является интервальной, изучал Аднаджевич [76, 8A645].

Различные вопросы об упорядоченных пространствах рассматривали Берсан [76, 10A286], Осташевский [76, 4A469; 74, 8B552], Горд и Нейдлер [73, 9A454], М. Рудин [76, 4A461], Уолк [76, 4A470], Симкони [77, 3A405], Лам [75, 6A629], Леви [74, 6A596], Уильямс [75, 4A538], Хит и Лютцер [75, 12A466], Горд [74, 11A580], Сингал и Прабха [74, 9A530,] Керрут и Кларк [74, 10A190].

Деак [76, 1A615] установил связь упорядоченных пространств со своей теорией структур направлений, введенных им в 1964 году. Джефрей [76, 7A600] применил упорядоченные пространства для нужд математической экономики.

Топологические полурешетки. Подавляющее большинство работ посвящены компактным полурешеткам. Одной из причин повышенного внимания к ним является то, что компактные полурешетки составляют важнейший класс компактных полугрупп. Однако прогресс достигнут в изучении только одного класса компактных полурешеток — полурешеток Лусона, класса, замечательного во многих отношениях. Об этих полурешетках будет сказано ниже.

Проблемы по компактным полурешеткам систематизировали Браун и Стралка [74, 3A355]. Проблему 44 и частично 39 из этого списка решил Лау [75, 3A532; 76, 3A500]. Доказано, что 1) если S — топологическая полурешетка на n -клетке, $n \geq 2$, и B — ее граница, то $B^2 = S$, 2) существуют такие топологическая полурешетка B на двумерной клетке и $x \in B$, что $0 \notin xB$, 3) двумерная топологическая полурешетка на континууме Пеано содержит двумерную клетку. Обобщая последний результат, Лау [77, 9A561] доказал, что если когомологическая размерность полурешетки Пеано над каким-нибудь

нетривиальным модулем коэффициентов равна n , то полурешетка содержит n -мерную клетку.

Боуман [76, 4A142] показал, что левые сдвиги компактной полурешетки непрерывны, а ее сдвиговая оболочка сама является компактной полурешеткой в компактно открытой топологии. Степ [73, 7A192] дал абстрактную характеристику класса решеток идеалов компактных топологических полурешеток. Хофман, Мислав и Стралка [76, 5A305] определили для компактной полурешетки S размерностную емкость как верхнюю грань таких мощностей множеств X , что существует непрерывный гомоморфизм S на I^X , где I — единичный интервал. Доказано, что размерностная емкость прямого произведения компактных полурешеток равна сумме размерностных емкостей.

Вильямс [76, 4A496] нашел достаточное условие того, что континуум Пеано допускает полурешеточную операцию, Оберхоф [75, 4A546] — достаточные условия того, что дерево допускает структуру полурешетки с 1. Связную компактную полурешетку с 1 без свойства неподвижной точки построил Коэн [74, 9A345].

Топологический моноид называется (размерностно) стабильным, если у него нет эпиморфных образов высшей размерности. Стабильные 0-мерные компактные полурешетки изучали Хофман, Мислав и Стралка [74, 8A405; 75, 9A201]. Очевидно, у этих решеток нет эпиморфизмов на единичный интервал I . Оказывается, каждый эпиморфизм произвольной компактной 0-мерной полурешетки на I аппроксимируется в топологии равномерной сходимости композициями эпиморфизмов на канторов дисконтинуум и стандартного отображения последнего на I . В частности, компактная 0-мерная полурешетка ее характеров имеет бесконечную цепь, плотную в смысле порядка. Лоусон [73, 7A189] доказал, что компактная локально связная полурешетка является стабильной. Лау [73, 9A482] указал ряд классов костабильных полурешеток, то есть таких, что каждый гомоморфизм любой компактной полурешетки на нее не повышает кохомологическую размерность. Браун и Стралка [77, 12A311] предложили конструкцию, которая дает запас вполне нестабильных компактных 0-мерных полурешеток, то есть таких, которые допускают достаточное семейство непрерывных эпиморфизмов на I .

Мюнценбергер и Смитсон [75, 7A419] доказали, что нижняя полурешетка S компактна в интервальной топологии тогда и только тогда, когда она полна как полурешетка, то есть

существует $\inf$ для любого непустого подмножества и каждая непустая цепь имеет $\sup$. Ли [73, 12A305] изучал периферические элементы компактных связных полурешеток и решеток.

Существование и единственность свободных компактных алгебр доказал С. А. Либер [73, 8A272]. Пусть X — топологическое пространство, K — класс однотипных компактных универсальных алгебр. Компактная алгебра $F \in K$ вместе с непрерывным отображением s пространства X в F называется свободной компактной алгеброй класса K над порождающим пространством X , если

1) алгебра F топологически порождается элементами образа X , то есть в F не существует такой замкнутой подалгебры, которая содержит образы элементов X и отлична от F ;

2) для любого непрерывного отображения f пространства X в произвольную алгебру A класса K существует такой непрерывный гомоморфизм g F в A , что $gs = f$.

Доказано, что каждый непустой класс компактных универсальных алгебр, который декартово замкнут и является наследственным по замкнутым подалгебрам, содержит свободные компактные алгебры над любым порождающим пространством X , и что такая алгебра единственна с точностью до топологических изоморфизмов над образом X . В частности, существует и единственна свободная компактная полурешетка над любым порождающим пространством X .

Роль свободных компактных полурешеток подчеркивается тем, что каждая компактная полурешетка представима как факторполурешетка свободной компактной полурешетки над подходящим порождающим пространством X . Доказано, что свободная компактная полурешетка над вполне регулярным порождающим пространством содержит X , то есть s является гомеоморфным вложением. Свободная компактная полурешетка полна и для бесконечного X не является алгебраически свободной. В то же время показано, что элементы замыкания образа X алгебраически порождают в F алгебраически свободную подполурешетку.

Различные вопросы по компактным полурешеткам рассматривали Йигер [77, 1A449], Мислав [73, 12A443], Боумен [73, 8A287], Чоу [76, 12A225], Бейе и Лау [77, 12A178].

Внимание ряда авторов привлекали компактные полурешетки Лоусона. Сначала Лоусон доказал, что компактная полурешетка S допускает семейство непрерывных гомоморфизмов в единичный интервал, разделяющее пары различных точек, если и только если базу ее топологии в каждой точке со-

ставляют открытые подполурешетки. Полурешетки с этим свойством получили имя Лоусона. Очевидно, они также характеризуются как замкнутые подполурешетки прямой степени I . Класс компактных полурешеток Лоусона декартово замкнут и является наследственным относительно замкнутых подполурешеток и факторполурешеток, однако, как показал Лоусон, является истинным подклассом класса всех компактных полурешеток.

Для топологической полурешетки S определим двойственную ей полурешетку как полурешетку всех непрерывных гомоморфизмов S в двухэлементную полурешетку с компактно открытой топологией. Известная двойственность между компактными 0-мерными полурешетками и дискретными полурешетками с 1 служит исходным моментом исследования в книге «Понтрягинская двойственность компактных 0-мерных полурешеток и ее приложения» Хофмана, Мислава и Стралки [77, 2A194K; 75, 1A354K].

В книге «Алгебраическая теория компактных полурешеток Лоусона. Приложения соответствий Галуа для компактных полурешеток» Хофман и Стралка [77, 6A230] для произвольной компактной полурешетки Лоусона L строят новую топологическую полурешетку PL вместе с непрерывным гомоморфизмом PL в L , которую определяют как полурешетку по пересечению всех решеточных идеалов L . Полурешетка PL является центральным объектом изучения в книге и представляет собой компактную 0-мерную полурешетку, двойственная для которой дискретная полурешетка полна. Функтор P оказывается левым рефлексором из категории компактных полурешеток Лоусона в некоторую подкатегорию категории компактных нульмерных полурешеток, а PL — проективным объектом относительно решеточных гомоморфных наложений.

Хофман и Стралка [73, 7A184] исследуют вопрос о том, является ли каждая компактная полурешетка Лоусона строгим проективным пределом локально связных конечномерных полурешеток. Авторы нашли широкий класс полурешеток с этим свойством.

Гомоморфизмы компактных полурешеток Лоусона изучали Хофман и Мислав [76, 2A386]. Пусть T — замкнутая подполурешетка S и $t \notin T$. Доказано существование двух непрерывных гомоморфизмов S в I , которые совпадают на T и различны в точке t . Отсюда следует, что в категории компактных полурешеток Лоусона эпиморфизмы являются наложениями. Другое

доказательство этого факта предложил Кроули [77, 7A289].

Хофман и Мислав [77, 12A337] доказали, что категория компактных 0-мерных полурешеток является категорией с амальгамами, а категория компактных полурешеток Лоусона — не является. Хейс [75, 12A188] построил нормальные компактные связки групп над компактной полурешеткой Лоусона. Компактные полурешетки Лоусона рассматривал Лау [74, 1A194].

Свободные компактные полурешетки Лоусона описал С. А. Либер^{*3}. Их роль подчеркивается тем, что каждая компактная полурешетка Лоусона представима как факторполурешетка свободной. Доказано, что свободная компактная полурешетка Лоусона над компактом X топологически изоморфна полурешетке по объединению его непустых замкнутых подмножеств $2^X \setminus \{\emptyset\}$ с экспоненциальной топологией. Если X — не компакт, надо предварительно взять его чеховскую компактификацию βX .

Степ [74, 4A428] нашел достаточные условия вложимости топологической полурешетки в топологическую решетку. В работе [76, 3A332] он назвал топологическую полурешетку абсолютно максимальной, если ее непрерывный образ в любую полурешетку замкнут, и доказал, что дискретная полурешетка абсолютно максимальна, если в ней каждая цепь конечна. Макмастер [74, 2A422; 75, 3A530; 76, 12A395] обобщил понятие топологической полурешетки на случай произвольного направленного вниз множества. Операция, заменяющая пересечение, ставит в соответствие каждой паре элементов подмножество всех их общих нижних границ. Борде [77, 12A294] определил нормирование на полурешетке. Боумен [74, 9A200; 76, 11A220] рассматривал топологическую полурешетку как категорию. Лоусон [75, 1A247; 77, 3A155] доказал, что компактная полутопологическая полурешетка является топологической.

Топологические решетки. Обобщая теорему Капланского, В. В. Пашенков [76, 10A287] доказал, что любое вполне регулярное пространство определяется с точностью до гомеоморфизма топологической решеткой всех своих непрерывных функций действительных функций с топологией поточечной сходимости. Этот же результат получил Е. М. Вечтомов [77,

^{*3} VII Всесоюзн. тополог. конф.. Минск, 1977, с. 111.

12A545] как для топологии поточечной сходимости, так и для компактно открытой.

И. В. Протасов и В. С. Чарин^{*4} ввели на решетке $L(G)$ замкнутых подгрупп топологической группы G экспоненциальную топологию, установили связь между строением группы и топологическими свойствами этой решетки и дали полную классификацию локально компактных групп с компактной решеткой $L(G)$. Для локально компактной группы указано, что 1) $L(G)$ дискретна тогда и только тогда, когда G дискретна с условием минимальности для подгрупп, 2) если $L(G)$ связна, то G тривиальна.

Ли [73, 12A305; 77, 3A263] показал, что в топологической решетке на двумерной клетке элементы, не разложимые в объединение и пересечение, принадлежат границе решетки, и привел достаточные условия, которым должна удовлетворять решетка на двумерной клетке, чтобы ее граница состояла только из элементов, каждый из которых не разлагается либо в пересечение, либо в объединение. Роудз [73, 9A290] доказал, что если L и M — топологические решетки на n -мерной и m -мерной клетках соответственно и если существует порядковый изоморфизм между их границами, то $n = m$ и решетки гомеоморфны. Если, кроме этого, L и M дистрибутивны, они изоморфны. Ли [75, 2A342] доказал, что в связной компактной решетке коразмерности n коразмерность границы главного идеала меньше n . Этот результат обобщили Ли и Лау [76, 5A304].

Ли [75, 1A353] изучал компактные связные решетки ширины два; он, например, нашел условия, при которых такая решетка есть объединение конечного числа своих компактных связных дистрибутивных подрешеток. Стралка [74, 11B964] доказал, что локально компактная связная локально выпуклая дистрибутивная решетка топологически изоморфно вкладывается в компактную дистрибутивную решетку.

Свободные компактные решетки изучал С. А. Либер [73, 8A272]. Доказано существование свободной компактной решетки F над порождающим пространством X , причем, если X вполне регулярно, F содержит X топологически. Каждая компактная решетка представима как факторрешетка свободной. Решетка F является полной и алгебраически не свободна, если $|X| > 2$. В то же время показано, что подрешетка F , алгебраически порождаемая элементами замыкания пространства

^{*4} 14-я Всесоюзн. алгебр. конф.. Новосибирск, 1977, т. 1, с. 56.

X , является алгебраически свободной решеткой. Независимо Степ [75, 11A388] доказал теорему существования свободной компактной решетки, порожденной топологической полурешеткой.

Чоу [75, 2A375; 73, 3A235] изучал проективные компактные дистрибутивные решетки в классе 0-мерных компактных решеток и классе компактных L -решеток, то есть допускающие достаточное семейство непрерывных гомоморфизмов в I . Известно, что класс 0-мерных компактных дистрибутивных решеток совпадает с классом проконечных дистрибутивных решеток. Поэтому проективными решетками в нем являются ретракты проконечного пополнения дискретной свободной дистрибутивной решетки. Доказано, что в категории всех компактных дистрибутивных решеток каждый проективный объект является либо 0-мерным, либо не вкладывается в прямую степень I . Как доказал Штраус [68, 12A399], компактная решетка вкладывается в степень I , если и только если она бесконечно дистрибутивна. Поэтому в классе компактных L -решеток проективными являются только упомянутые ретракты проконечного пополнения свободной дистрибутивной решетки. Чоу [73, 11A294] доказал также, что в категории компактных дистрибутивных решеток нет нетривиальных инъективных объектов. В 0-мерном случае каждый объект имеет инъективную оболочку, причем инъективны компактные булевы решетки и только они.

В предыдущих работах Пристли развил для дистрибутивных решеток аналог теории двойственности Стоуна для булевых алгебр, в частности, доказал, что всякая дистрибутивная решетка представима как решетка открыто-замкнутых подмножеств некоторого упорядоченного топологического пространства. Дальнейшие результаты содержатся в работах Пристли [74, 12A324; 76, 1A567]. Гирц и Кеймел [77, 4A317] построили теорию представлений произвольных решеток, подобную теориям Стоуна и Пристли. Объектами, двойственными решеткам, служат компактные, вполне несвязные частичные нижние полурешетки и всякая решетка изоморфна решетке всех открыто-замкнутых фильтров такой полурешетки. Корниш [77, 8A346] показал, что копроизведение двух ограниченных дистрибутивных решеток L и M изоморфно решетке всех монотонных функций из пространства Пристли решетки L в дискретное пространство решетки M . Корниш [76, 9A352] также вывел один из результатов Пристли из двойственности Стоуна.

Пусть L — упомянутый выше класс компактных решеток. Эти решетки также характеризуются как компактные вполне дистрибутивные решетки или как замкнутые подрешетки прямой степени I .

Описание L -свободных компактных решеток, которое обобщает известную конструкцию свободной дистрибутивной решетки конечного ранга, получил С. А. Либер^{*5}. Если S — компактная полурешетка, обозначим через 2^S подпространство всех замкнутых возрастающих подмножеств пространства замкнутых подмножеств S с экспоненциальной топологией. Очевидно, 2^S — дистрибутивная решетка относительно теоретико-множественного объединения и пересечения. Доказано, что решетка 2^S является L -репликой компактной полурешетки Лоусона S . Поскольку свободная компактная полурешетка Лоусона с 0 над компактом X изоморфна полурешетке 2^X замкнутых подмножеств X , отсюда следует теорема: L -свободная компактная решетка F с 0 и 1 над компактом X топологически изоморфна решетке замкнутых возрастающих подмножеств свободной компактной полурешетки Лоусона 2^X над компактом X :

$$F \simeq 2^{2^X}.$$

Гинграс^{*6} рассматривал полные решетки, базу топологии в каждой точке которых образуют замкнутые интервалы. Одно многообразие полных топологических решеток изучал Исбел [76, 8A398]. Мурти [75, 8A531] нашел достаточные условия для того, чтобы дистрибутивная решетка являлась хаусдорфовой в топологии идеалов (предбазой которой являются все идеалы и фильтры решетки). Фитцпатрик [74, 5A521] нашел условие, при выполнении которого модулярная топологическая решетка с дополнениями вполне несвязна. Фитцпатрик и Макмастер [74, 9A536] доказали, что топологическая решетка с относительными дополнениями конечной ширины вполне несвязна. Уорд [76, 7A599] изучал решетки с отношениями близости, которые естественным образом связаны с решеточными операциями. Дж. Хаджиев [75, 8A449; 4A548] изучал свойства 0 -топологий и других топологий в решетках. Топологические решетки рассматривал Монтейро [75, 10A418].

^{*5} Исслед. по алгебре. Саратов, 1977, вып. 5, с. 44—52.

^{*6} Gingras J.—Rocky Mountain J., 1976, v. 6, N 1, p. 85—104.

В стороне от основной линии обзора лежит последний раздел.

Нечеткие топологические пространства. Понятие нечетного множества было впервые введено Заде [68, 1B574; 66, 1B534]. Его источником послужили такие задачи, в которых встречаются классы с нечетко выраженными границами, например, проблема распознавания образов или построения самоорганизующихся систем. Нечеткое множество A над X определяется как функция $\mu_A(x)$, которая задана на X и принимает значения от 0 до 1. Обобщая обычную характеристическую функцию множества, $\mu_A(x)$ выражает степень принадлежности элемента x множеству A . Чем выше уверенность, с которой элемент x можно отнести к множеству A , тем ближе функция участия к 1. Например, она тождественно равна 0 для пустого множества и 1 — для всего пространства.

Для нечетких множеств пространства X вводятся соотношения равенства, включения, объединения и т. п., которые повторяют соответствующие формулы для обычных характеристических функций $\mu_A(x) = \mu_B(x)$, $\mu_A(x) \leq \mu_B(x)$, $\mu = \max(\mu_A(x), \mu_B(x))$ и т. п.

Гоген [68, 6A338] определил и изучал L — нечеткие множества, которые естественным образом обобщают нечеткие множества, если функция участия принимает значения на полной решетке или упорядоченной полугруппе L . Чен [69, 4A410] определил нечеткую топологию как систему нечетких подмножеств на X , которая удовлетворяет обычным условиям на топологии. Если f — отображение X в Y , то прообраз нечеткого множества B характеризуется функцией участия $f(\mu_B(x))$, где $\mu_B(x)$ — функция участия для B . На основе этого понятия обычным образом определяются непрерывные отображения и нечеткие гомеоморфизмы. Гоген [74, 3A364] ввел нечеткие аналоги обычных топологических понятий базы, предбазы, произведения, компактности и т. п. Найдено ограничение на L , необходимое и достаточное, чтобы в классе L -нечетких пространств выполнялась теорема Тихонова о бикompактности произведения: супремум конечного числа немасимальных элементов немасимален. Финальную и счетную компактность определил Уонг [74, 3A365].

В другой работе Уонг [74, 11A577] ввел понятие нечеткой точки. Ее функция принадлежности определена условиями: $\mu(x_0) = 0$ при $x \neq x_0$ и $\mu(x_0) = y$, где $0 < y < 1$. На основе этого понятия вводятся и изучаются понятия нечеткой локальной базы, первой аксиомы счетности, сепарабельности, ло-

кальной компактности и другие локальные свойства. Развивая локальный подход, Кристоф [77, 11A447] определил и изучал нечеткую фактортопологию и локальную бикомпактность.

Хаттон [75, 10A429] определил нормальность для L -нечетких пространств и доказал «нечеткую лемму Урысона». Вейс [75, 11A514] изучал индуцированную топологию для нечетких множеств, а Лоуэн [75, 11A515] определил сходимости. Уонг [77, 1A464] показал, что категория топологических пространств и непрерывных отображений является подкатегорией категории нечетких топологических пространств и L -непрерывных отображений. Различные вопросы о нечетких пространствах рассматривал Лоуэн [74, 3A387; 77, 8A511; 11A446].

В. Н. САЛИЙ

УПОРЯДОЧЕННЫЕ МНОЖЕСТВА. ПОЛУРЕШЕТКИ. ОБОБЩЕНИЯ РЕШЕТОК

Предлагаемый обзор является продолжением обзора [76, 10A201], составленного по материалам реферативного журнала «Математика» за 1969 — первую половину 1973 г.

1. Упорядоченные множества (у. м.)

Упорядоченным множествам посвящены четыре раздела первой главы в книге Блиса и Яновича [74, 3A122] и диссертация Фольдеша [76, 1A61]. Популярную статью об отношении порядка, его обобщениях и связанных с ними алгебраических структурах написал Герхардтс [76, 4A26].

1. Новое доказательство теоремы Уолка (рефлексивное и антисимметричное бинарное отношение ω тогда и только тогда транзитивно, когда уравнение $\omega \xi \omega = \omega$ разрешимо) предложил В. К. Синкевич [75, 11A392].

Шварц [74, 6A391] девятью аксиомами охарактеризовал категорию K у. м. с изотонными отображениями. Первые шесть аксиом, по существу, совпадают с аксиомами Л. А. Скорнякова [70, 4A313] для категории множеств. Остальные три описывают двухэлементную цепь как адекватный слева (в смысле Исбела [63, 12A300]) коинтегральный объект E , обладающий ровно тремя эндоморфизмами, для любого множества экземпляров которого существует прямое произведе-

ние и который удовлетворяет условию: для универсального квадрата $\alpha\gamma_1 = \beta\gamma_2$, где $\alpha, \beta: 1 \rightarrow E$ различны (1 — правый нуль категории), найдется морфизм γ такой, что $\alpha\gamma = \alpha\gamma_2$ и $\beta\gamma = \beta\gamma_1$.

Секанина [76, 7A391] показал, что полная подкатегория L указанной категории K адекватна слева тогда и только тогда, когда среди объектов L имеются не только антицепи. Если вместо K рассмотреть категорию всех решеток, то адекватность слева для ее полной подкатегории L оказывается эквивалентной наличию в L по крайней мере одной решетки, ретрактом которой служит четырехэлементная булева решетка. Полным вложением категории K в категорию всех полугрупп посвящена другая работа Секанины*¹.

Бонне [73, 7A314] рассматривает основные контравариантные функторы вполне упорядоченных неодноэлементных множеств как контравариантные функторы категории K в себя. Полная подкатегория категории K , порожденная всеми у. м., не содержащими цепей, изоморфных данной цепи α , называется α -категорией. Приводятся условия, при которых α -категория замкнута относительно лексикографических сумм и произведений.

Теорию инъективных оболочек для категории K построил Баксич [72, 11A249].

Изучая категории алгебраических систем со строгими гомоморфизмами, Веселы и Копечек [77, 8A355] выясняют, в частности, когда строгие гомоморфизмы являются мономорфизмами в категориях решеток и связных у. м. Общим свойствам изотонных отображений у. м. посвящены работы Камии и Нарусимы*².

Топологические гомологические теории распространяет на у. м. Келмбах [76, 9A482]. Бамби, Купер и Летч [76, 4A361] описали реализованный ими на ЭВМ алгоритм вычисления групп гомологий и когомологий конечных у. м.

2. Связь между некоторыми утверждениями об у. м., эквивалентными в теории множеств Цермело-Френкеля аксиоме выбора, исследовали для системы аксиом Геделя-Бернайса без аксиомы фундирования Фелгнер и Йех [73, 11A46].

М. Ф. Бокштейн [76, 5A290], основываясь на аналогии в доказательствах теоремы Цермело и леммы Цорна, нашел

*¹ Sekanina M.—In: Theory of Sets and Topology, Berlin, 1972, p. 455—466.

*² Kamii M., Narushima H.—Proc. Fac. Sci. Tokai Univ., 1971, v. 6, N 1—2, 27—45; 1973, v. 8, N 1—2, p. 1—7.

теорему, обобщающую оба эти классические результата. Еще одно доказательство эквивалентности аксиомы выбора, принципа Хаусдорфа и леммы Цорна нашел Мейстерс [73, 7A69]. Связь между вполне упорядоченными, вполне упорядочиваемыми подмножествами множества и конечным выбором на нем (то есть частичными функциями выбора, определенными на всех непустых конечных подмножествах) обсуждает Трусс [74, 4A54].

Абян^{*3} доказывает следующую теорему: если у. м. P частично вполне упорядочено (то есть не имеет бесконечно убывающих цепей и бесконечных антицепей), а у. м. Q таково, что существуют взаимно однозначные изотонные отображения P на Q и Q на P , то Q изоморфно P . Абстрактную характеристику каждого из четырех у. м.: натуральных, целых, рациональных и вещественных чисел, — предложил Бигальке [75, 6A107]. А. Г. Пинус [74, 12A93] установил разрешимость слабой теории второго порядка класса всех неподвижных линейно упорядоченных множеств.

Карпинтеро [76, 8A633, 634] построил пример непрерывного (то есть без скачков и щелей) линейно упорядоченного множества, любые два различные интервала которого имеют различные порядковые типы. Единственным отображением подобия этого у. м. на себя является тождественное отображение.

Две проблемы о деревьях сформулировал Рюден [74, 7A103]. Полудеревья изучали Мюнценбергер и Смитсон [75, 8A491].

Продолжая свои исследования [71, 11A194], Чеккерини рассматривал условия архимедовости у. м. в наиболее общем виде [74, 11A360].

И. В. Витенько и В. В. Николенко [74, 11A375] рассматривают линейно упорядоченное множество с антиизотонным идемпотентным преобразованием α как алгебру типа $(\min, \max, \alpha)$.

Ажендорф [73, 6A62; 74, 4A236] изучает определенные им алгебраические цепи в смысле их неразложимости и расширений. Свойствам неразрываемости, конечной неразрываемости, суб-и супердистрибутивности для цепей посвящены его работы [73, 6A62; 74, 2A291; 75, 1A249; 77, 2A353; 3A38; 10A187]. Бенда [76, 12A44] исследует некоторые свойства линейных порядков, называемых зеркальными.

^{*3} Abian A.—AU, 1971, v. 1, p. 236—237.

Условия существования инъективного изотонного отображения между конечными кардинальными произведениями конечных цепей нашел Буршайд [75, 1A108]. Стенли [73, 6B319] изучал разложения у. м. в суммы специфических объединений цепей. О цепных произведениях написана работа Эйгнера [75, 12A292].

Предельным точкам направленных у. м. посвящена заметка Франклина [74, 9A528].

3. Цулауф [75, 4A335] получил новые оценки для числа неизоморфных порядков и числа неизоморфных квазипорядков на конечном множестве.

Рекурсивные вложения порядков в булевы алгебры исследовал Апт [77, 9A353]. Алгоритм, дающий эффективное вложение рекурсивного порядка в алгебру Мостовского, был предложен Эмде [73, 9A54].

Монжарде [77, 12A292] вводит метрику на графе, естественным образом представляющем данное у. м., и на языке этой метрики выражает свойство у. м. быть полумодулярным сверху.

Новак [76, 11A64] выясняет возможность представления у. м. как упорядоченного подмножества в у. м. вида 2^m , где m некоторый фиксированный кардинал. Условие представимости у. м. простыми фильтрами дистрибутивной решетки получил Дейви*⁴.

Жемберы [75, 2A370] привел некоторые достаточные условия, которым должно удовлетворять счетное у. м., чтобы быть изоморфным множеству всех операций унарных алгебр, упорядоченному условием: $f \leq g$, если всякое отображение, сохраняющее операцию g , сохраняет операцию f . Этой теме посвящена также работа Якубиковой [77, 7A302].

Хефт [75, 5A311] показал, что все расширения частичной алгебры образуют у. м., являющееся полурешеткой с нулем.

Холл [74, 5A188] доказал, что всякое конечное у. м. с нулем изоморфно у. м. классов двусторонне идеальной эквивалентности Грина на конечной полугруппе.

Условие, необходимое и достаточное для того, чтобы у. м. допускало классификацию своих неразложимых представлений над векторным пространством, найдено Л. А. Назаровой [76, 3A374] (см. также ее работы [75, 4A414; 76, 5A369] и работу Люпия [76, 5A368], — в них приводятся критерии конечности числа неразложимых представлений у. м.). В. В. Отра-

*⁴ Davey B. A.— AU, 1973, v. 3, p. 345—347.

шевская [76, 10A218] рассматривала у. м., имеющие бесконечно много неразложимых представлений. В. В. Плахотник [74, 10A294] вводит понятие представления у. м. над кольцом классов вычетов и дает критерий конечности числа неразложимых представлений данного у. м. Вопрос классификации таких представлений сводится к приведению к каноническому виду некоторой матричной задачи. В [76, 10A244] тот же автор рассматривает аналогичную задачу для представлений у. м. над произвольным кольцом. Классификация неразложимых объектов в различных представлениях у. м. является основной темой обзоров Габриэля [76, 6A375] и [74, 7A455]. В последнем содержится обширная библиография по этому вопросу.

4. Простые доказательства теоремы Шпильрайна (Марчевского) о том, что каждый порядок может быть продолжен до линейного, предложили Абян [75, 4A336] и Моргадо*⁵. Моргадо, кроме того, показал, что порядок ω тогда и только тогда

является линейным, когда $\zeta = \omega(\zeta \cap \zeta)^{-1}$ или $\zeta = (\zeta \cap \zeta)^{-1} \omega$ для любого квазипорядка ζ , содержащего ω . Пусть $S(x, y)$ обозначает количество линейных расширений данного конечного порядка, содержащих пару (x, y) . Пусть, по определению, $x < y$ тогда и только тогда, когда $S(x, y) \leq S(y, x)$. Ясно, что отношение $<$ содержит данный порядок. Фишберн [75, 5B408] на множестве, имеющем 31 элемент, строит порядок, для которого отношение $<$ не является упорядоченностью.

Пусть P — у. м., Q — его упорядоченное подмножество. Новак [74, 11A89] доказал, что для всякого линейного расширения порядка, заданного на Q , существует такое линейное расширение порядка, заданного на P , которое индуцирует на Q данное линейное расширение. Другой его результат состоит в том, что каждое линейное расширение у. м. P приводит к вполне упорядоченности тогда и только тогда, когда P удовлетворяет условию минимальности и каждая антицепь в P конечна (этим свойством объясняется название таких у. м.: частично вполне упорядоченные).

Обозначив через E_P множество всех линейных расширений у. м. P , а через C_P — множество всех максимальных цепей P , Ривал [77, 9A350] для конечной решетки L устанавливает неравенство $|C_L| \leq |E_{J(L)}|$, где $J(L)$ есть у. м. неразложимых элементов L . При этом равенство характеризует дистрибутивные решетки L .

*⁵ Morgado J.— Portug. Math., 1973, v. 32, p. 1—7.

Обзор результатов и методов, связанных с задачей описания всех максимальных порядков над заданным Z -порядком, содержится в статье Цассенхауза [74, 6A342].

Большое число работ посвящено исследованию различных проблем, связанных с размерностью у. м.

Пусть P — у. м. и 2^P обозначает полную решетку всех изотонных отображений P в двухэлементную цепь. Вилле [76, 12A385] доказал, что размерность P равна наименьшей среди мощностей цепей, порождающих 2^P . Перфект [74, 9A329] установил, что для любых двух кардинальных чисел m, n таких, что $2 \leq m \leq n$, существует у. м. P , размерность которого равна m , а минимальная мощность множества цепей, объединение которых равно P , совпадает с n .

Богарт [73, 12B364] дал простое доказательство теоремы Хирагути о том, что размерность n -элементного у. м. не превосходит числа $\left\lfloor \frac{1}{2}n \right\rfloor$ (при $n > 3$). С неравенством Хирагути

связана проблема описания у. м., имеющих максимальную для своей мощности размерность. В работе Богарта и Троттера [73, 12B365] имеется частичное продвижение в решении этой проблемы. В [75, 12B432] Троттер элементарными методами доказал следующие неравенства для у. м. P : 1) $|P \setminus A| \geq 2 \rightarrow \dim P \leq |P \setminus A|$; 2) $\dim P \leq w(P \setminus E) + 1$; 3) $\dim P \leq 2w(P \setminus A) + 1$ (здесь A — антицепь, E — множество максимальных элементов P , w обозначает ширину соответствующего у. м.). В частности, из первого неравенства получается элементарное доказательство теоремы Хирагути. Троттером установлен также следующий факт [77, 7A284]: если в у. м. имеется антицепь A такая, что $|P / A| = n \geq 2$, то $\dim P < n$ тогда и только тогда, когда P не содержит упорядоченных подмножеств, изоморфных у. м. из приводимого в работе списка. Здесь же отметим результат Троттера и Мура [77, 3B430] о том, что упорядоченное включением множество всех порожденных связных подграфов нетривиального связного графа имеет размерность, равную числу вершин, не являющихся точками сочленения. Бейкер, Фишберн и Робертс [71, 5B367] дали новую характеристику у. м. размерности 2, а Келли и Ривал [75, 7B367] построили восемь решеток, с помощью которых порождается бесконечное семейство у. м. размерности 3.

У. м. называется неприводимым, если удаление любого его элемента приводит к у. м. меньшей размерности. Троттер [75, 7B380] показал, что для любого натурального n существ-

вуют неприводимые у. м. высоты, большей h . Келли [77, 9A352] для любого натурального n описывает все n -элементные неприводимые у. м. размерности 3. Оказывается, что для любого четного $n \geq 8$ таких у. м. имеется 4, для любого нечетного $n \geq 9$ число их равно 5. При $n=6,7$ получается соответственно 3 и 21 у. м. рассматриваемого типа.

k -размерностью ($k \geq 2$) у. м. P называется наименьшее натуральное n такое, что P содержится в произведении n цепей длины k каждая. В статье Троттера [76, 5A299] показано, что k -размерность дистрибутивной решетки 2^P равна наименьшему натуральному n такому, что существует разбиение $P = C_1 \cup C_2 \cup \dots \cup C_n$, где каждое C_i является в P цепью с не более чем $n-1$ элементами, а основной результат его работы [75, 12B430] — описание строения у. м. P , для которых имеет место неравенство $\dim_2(P \setminus \{x\}) < \dim_2 P$ при всех $x \in P$. Отметим следующую связанную с понятием k -размерности проблему: верно ли, что для $k \geq 3$ у. м. всегда содержит пару элементов x, y таких, что $\dim_k P \leq 1 + \dim_k(P \setminus \{x, y\})$? Эта задача не решена и для обычной размерности, но для $k=2$, как показал Троттер [76, 7B364], ответ отрицательный. В этой же работе неравенство Хирагути обобщается на случай 3- и 4-размерностей. Именно,

$$\dim_3 P \leq \left\lfloor \frac{1}{2} |P| \right\rfloor, \text{ если } |P| \geq 5, \text{ и } \dim_4 P \leq \left\lfloor \frac{1}{2} |P| \right\rfloor,$$

если $|P| \geq 6$ ($\{x\}$ обозначает наименьшее целое $\geq x$).

Троттер и Богарт [77, 3B364] ввели новую — интервальную — размерность для у. м. и установили для нее некоторые свойства и оценки. Теорию размерности у. м. распространили на случай произвольных структур (в смысле Бурбаки) Новак и Новотны [75, 8A353]. При специализациях для у. м. эти построения дают все известные вариации определения размерности у. м.

Эльрих и Стефенс [77, 1A36] доказали, что всякое счетное у. м. без бесконечных цепей допускает разбиение на попарно непересекающиеся цепи, каждая из которых имеет непустое пересечение с некоторой фиксированной антицепью. Клас^{*6} сформулировал (в терминах цепей) достаточное условие, при котором максимальная антицепь у. м. имеет максимальную мощность. Шелах [77, 1A37] построил пример континуального у. м., квадрат которого является объединением счетного множества цепей.

^{*6} K l a s s M. J.— Proc. Amer. Math. Soc., 1974, v. 45, p. 28—30.

Эйгнер [73, 11В440] нашел новое доказательство теоремы Шпернера о длине максимальных антицепей в булевой алгебре всех подмножеств n -элементного множества. Клейтман, Эдельберг и Любел [74, 8В291] исследовали возможность распространения теоремы Шпернера на некоторые упорядоченные множества. В частности, ими доказано, что в любом конечном у. м. P существует антицепь максимального порядка, состоящая из орбит группы $\text{Aut} P$ автоморфизмов P . Клейтман [75, 5В546] получил ряд результатов типа теоремы Шпернера и обобщил ее на случай прямого произведения порядков. Доклад [76, 9В372] является обзором результатов Клейтмана в области у. м.-комбинаторики. Некоторые комбинаторные результаты для у. м. получил В. Н. Латышев [76, 12А349], применивший их к изучению нематричных тождеств ассоциативных алгебр.

5. Танниклиф [74, 8А483] показал, что введенная им конструкция поляризации множества при определенных условиях позволяет описать довольно широкий класс расширений у. м. В частности, дедекиндово пополнение у. м. может быть получено в связи с некоторой поляризацией. В другой своей работе*⁷ он исследовал вопрос о возможности продолжения изотонного отображения у. м. P в полную вполне дистрибутивную решетку L до полного гомоморфизма в нее пополнения P .

Полная решетка L называется слабым пополнением у. м. P , если в L сохраняются все конечные супремумы, существующие в P , а каждый элемент из L является супремумом некоторого множества элементов из P . И. Б. Закс [74, 9А331] установил, что всякому слабому пополнению L у. м. P соответствует некоторая операция замыкания на множестве всех подмножеств так, что L изоморфна решетке всех замкнутых подмножеств.

Рассматривая у. м. как категорию, Беллингер [73, 9А309] с этой точки зрения трактует пополнения у. м., в частности, приводит теоретико-категорное описание дедекиндова пополнения. Юнек [74, 2А307] доказал, что это пополнение есть функтор из категории у. м., морфизмами которой являются отображения пополнений, сохраняющие сечения, в категорию вполне упорядоченных множеств с такими же морфизмами.

Янсен [76, 3А323] на языке фильтров и идеалов сформулировал необходимое и достаточное условие вложимости у. м. в

*⁷ Tunncliffe W. R.—J. London Math. Soc., 1974, v. 8, p. 352—354.

полную и вполне дистрибутивную решетку с сохранением всех существующих точных граней. Сильным вложениям у. м. в дистрибутивные решетки посвящена работа Чена и Ко*⁸.

Варушакис [75, 12A464] исследовал свойства пополнения у. м., рассматривавшегося Курепой и Докасом [64, 7A126; 65, 5A63], которое он применил для определения расстояний с нечисловыми значениями. Ю. Шмидт*⁹ и Фляйшер [76, 8A407] показали, что каждое $\vee$ -пополнение у. м. является решением универсальной проблемы. Метод вложения у. м. в у. м., порожаемое заданным числом образующих, предложил Стейви [76, 4A43]. Основные приложения — к булевым алгебрам.

У. м. P называется цепно полным, если каждая его цепь, включая пустую, имеет супремум в P . Марковский [77, 2A349] исследовал цепные пополнения упорядоченных множеств. Если P — решетка, то цепное пополнение $\bar{P}$ (оно единственно для каждого P) является полной решеткой и естественное вложение $P \rightarrow \bar{P}$ сохраняет все счетные объединения. Цепное пополнение не обязательно сохраняет модулярность решетки. В [77, 2A350] тот же автор вводит понятие базиса у. м. и получает характеристики цепно полных у. м., имеющих базис.

Песотан [74, 9A332] определил понятие плотного расширения упорядоченных множеств. Построенная им теория самодвойственна и применима к классу у. м., включающему, например, дистрибутивные решетки и $\vee$ -полные решетки.

Условие расширяемости циклического порядка до полного циклического нашел Мегидо [76, 12A48].

Мена и Ю. Шмидт [73, 8A267] доказали, что любое дистрибутивное конечное расширение у. м. P тогда и только тогда удовлетворяют условию минимальности, когда этому условию удовлетворяет само P .

В работе Левича [77, 7A283] показано, что для любого подмножества множества N^n (N — натуральные числа) все продолжения координатного порядка до линейного порядка имеют порядковый тип, не превосходящий порядкового типа N^n , упорядоченного лексикографически.

6. Джюфрой и Шайблих [75, 1A360] обобщили решеточные условия Жордана-Дедекинда на случай произвольных упорядоченных множеств. Т. Тамура [76, 11A373] описал связь между полужамкнутыми отображениями и конфиналь-

*⁸ Chen C. C., Koh K. M.—Nanta Math., 1972, v. 5, N 2, p. 1—7.

*⁹ Schmidt J.—J. Austral. Math. Soc., 1974, v. 17, p. 406—413.

ными цепями в у. м. Абян [75, 9A247] назвал генерическим такое подмножество у. м. P , которое является направленным верх идеалом и имеет непустое пересечение с каждым конфинальным подмножеством P . Оказывается, подмножество прямого произведения двух у. м. тогда и только тогда является генерическим, когда оно есть прямое произведение генерических подмножеств сомножителей.

У. м. называется тесным, если каждая его антицепь конечна. Вайнштейн [77, 5A25] нашел условия тесноты прямого произведения двух у. м., усилив результат Ю. Н. Мухина и Е. Н. Старухиной [74, 12A195].

Согласно Грийе [70, 2A275], полным относительно цепей-антицепей у. м. (САС-у. м.) называется у. м., каждая максимальная антицепь которого пересекает каждую максимальную цепь. Леклерк и Монжарде [73, 11A286] исследовали свойства САС-у. м. Они показали, в частности, что конечное у. м. является САС-у. м. тогда и только тогда, когда оно не содержит четырехэлементного подмножества, упорядоченного по типу N (диаграмма напоминает букву N). Конечные модулярные САС-решетки все имеют порядковую размерность 2. Описаны также САС-у. м., допускающие отображение в множество натуральных чисел, сохраняющее отношение покрывания (градуированные САС-у. м.).

Апостолос [75, 5A278] ввел понятие нижнего раstra в у. м., обобщающее понятие «экрана» Кулиша [72, 2B790; 73, 11B764]. Мачиньский [76, 2A381] определил в у. м. с ортодополнениями понятие σ -дистрибутивности и привел некоторые ее эквиваленты. Каттанео и Маниа [75, 1A356] рассмотрели ортогональности в у. м. и их связь с ортодополнениями. Примеры — ортогональности в множестве идемпотентов кольца и некоторые конструкции, навеянные квантово-механическими объектами. Гадер и Хаскинс [75, 3A363] перенесли на случай произвольного у. м. понятие нейтрального элемента, сохранив теорему о центре решетки (элемент принадлежит центру тогда и только тогда, когда он нейтрален и обладает дополнением). В [73, 1B530] эти авторы для полумодулярных и модулярных у. м. доказали аналоги некоторых решеточных теорем и нашли их приложения к орграфам. Джефкот [73, 7A119] установила, что центр ортологик является булевой алгеброй.

Работы, посвященные ортомодулярным у. м., названы в обзоре Т. С. Фофановой.

7. Отношения эквивалентности на у. м., в основном инду-

цируемые порядковыми гомоморфизмами, изучал Гетчи [74, 6A390]. Штурм [74, 2A292; 2A308] продолжил исследование связей между отношениями порядка и эквивалентностями на данном множестве, начатые им в работах [72, 8A395; 73, 5A301]. Он опубликовал также обзор своих результатов*¹⁰. О книге В. В. Розена [74, 1A287], посвященной частичным операциям в у. м., говорилось в предыдущем обзоре [76, 10A201]. Леви-Брюль [75, 8A354] в у. м. с умножением ввел левое и правое частные и указал некоторые приложения этих конструкций.

Минорантно насыщенную $\vee$ -подполурешетку (в понятном смысле) в у. м. Рахунек*¹¹ называет 0-идеалом и находит условия, при которых 0-идеалы у. м. образуют решетку.

8. По-прежнему значительное внимание привлекают вопросы, связанные с существованием в у. м. неподвижных точек. Обзор на эту тему написал Кусьнеж [77, 3A42]. Майстерс [73, 7A69] без применения аксиомы выбора доказал теорему Цермело о неподвижной точке: если каждая цепь в непустом у. м. P имеет в P верхнюю грань, то всякое возрастающее отображение P в себя имеет неподвижную точку. Несколько обобщений известных теорем о неподвижных точках в у. м. доказал Пасини*¹². Абян*¹³ изучал неподвижные точки в у. м., в которых каждое вполне упорядоченное подмножество имеет н. в. г. Достаточные условия существования неподвижных точек для убывающих преобразований у. м. нашел Курепа [75, 12A289] (См. также его работу [74, 7A677]).

Марковский [77, 2A349] установил, что для всякого изотонного отображения цепно полного (см. п. 5) у. м. в себя множество неподвижных точек имеет наименьший элемент и само является цепно полным относительно индуцированного порядка. Х. Хефт и М. Хефт [77, 5A212] рассматривают в у. м. P следующие два условия: 1) для каждого изотонного $f: P \rightarrow P$ существует $x \in P$ такой, что x и $f(x)$ сравнимы; 2) любая непустая цепь в P имеет н. н. г. и н. в. г. Доказано, что в у. м. P , удовлетворяющем обоим этим условиям, каждое изотонное $f: P \rightarrow P$ имеет неподвижную точку. Ривал [77, 4A306] для ко-

*¹⁰ Sturm T.—Kniznice Odborn. Ved. Spisu Vysoke Ucení Techn. v Brne, 1975, B-56, p. 131—135.

*¹¹ Rachunek J.—Sb. Prací Přírodoved. Fak. Univ. Palackého v Olomouci, 1974, v. 14, p. 77—81.

*¹² Pasini A.—Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, 1974, v. 51, p. 167—177.

*¹³ Abian A.—Rend. Circ. Math. Palermo, 1971, v. 20, p. 139—142.

нечного и связного у. м. P нашел условие, альтернативное существованию неподвижной точки для любого изотонного $f: P \rightarrow P$.

Пусть $f: P \rightarrow P$ такое отображение у. м. P в себя, что 1) $f(a) > a$ для некоторого $a \in P$; 2) $x \leq f(x) \leq y$ влечет $f(x) \leq f(y)$ (для любых $x, y \in P$); 3) каждое непустое вполне упорядоченное подмножество в P имеет супремум. Родригес [74, 9A328] показал, что f обладает неподвижной точкой, и вывел ряд следствий из этого факта. Близкие результаты были получены ранее С. Р. Когаловским [66, 2A390]. Костовичи [76, 12A398] в полной мажорантной полурешетке S рассматривает пару изотонных отображений в себя f, g и автоморфизм φ такие, что $fg\varphi = \varphi gf$, и доказывает, что если fg обладает неподвижной точкой, то оно обладает и наибольшей неподвижной точкой $a \in S$, причем $f(\varphi(a)) = a$ и $\varphi(g(a)) = a$.

Антитонное отображение $f: P \rightarrow P$ называется поляризованным, если существует (обязательно единственное) $f^*: P \rightarrow P$ такое, что $ff^*(a) \geq a \leq f^*f(a)$ для любого $a \in A$ (связь Галуа). В случае, когда $f = f^*$, говорят, что f симметрично. Шмуель [76, 6A332] показал, что если P — полная атомная решетка и $f: P \rightarrow P$ симметричное поляризованное отображение, не убывающее на атомах, то f имеет неподвижную точку. Более того, если два такие отображения коммутируют, то у них есть общая неподвижная точка. Приводится пример трех попарно коммутирующих отображений указанного вида, не имеющих общей неподвижной точки.

Обобщение своей теоремы [72, 7A439] о неподвижных точках для многозначных отображений у. м. доказал Смитсон [73, 11A280]. Как следствие он получил известную теорему Девис-Тарского: решетка полна тогда и только тогда, когда каждое ее изотонное отображение в себя имеет неподвижную точку.

9. Фриз [74, 7A418] дал простое доказательство теоремы Дилуорса о том, что максимальные антицепи у. м. P , упорядоченные отношением $A \leq B \iff (\forall a \in A) (\exists b \in B) (a \leq_P b)$,

образуют дистрибутивную решетку, и получил из нее следствие: в P существуют максимальные антицепи A и B , являющиеся объединениями орбит группы $\text{Aut } P$ и такие, что для любой максимальной антицепи $C \subset P$ и любого $c \in C$ найдутся $a \in A, b \in B$ со свойством $a \leq c \leq b$. Е. Б. Рабинович [76, 7A270] дал частичное решение задачи классификации линейно упорядоченных

множеств с данной 2-транзитивной группой автоморфизмов.

Лонгьер [74, 10A254] изучала линейно упорядоченные множества P , обладающие свойством

$$(\forall x, y \in P)(\exists \varphi \in \text{Aut } P)(\varphi(x) = y).$$

Блоком такого у. м. называется подмножество $S \subset P$, которое выпукло, и для любого $\varphi \in \text{Aut } P$ множества S и $\varphi(S)$ совпадают или не пересекаются. При помощи блоков описывается строение у. м. указанного вида, имеющих данную группу автоморфизмов.

Фрухт, как известно, каждой группе G сопоставлял порядок Φ_G на множестве G такой, что $\text{Aut } \Phi_G \cong G$. Берд [74, 7A328] определяет в классе порядков, содержащих все Φ_G , операцию сплетения и утверждает, что для любых групп A и B группа автоморфизмов сплетения Φ_A и Φ_B изоморфна стандартному сплетению групп A и B .

Хауи и Шайн [74, 6A222] находят условия разложимости изотонного преобразования вполне упорядоченного множества в произведение идемпотентных изотонных преобразований. Торнтон [77, 10A108] установил некоторые свойства полугруппы всех изотонных преобразований у. м. Пусть $a \geq b \geq c$ — три элемента у. м. P , S_{abc} — такое преобразование P , что $S_{abc}(x) = b$, если $x \leq c$, и $S_{abc}(x) = a$ в противном случае. Е. П. Симельгор [77, 8A198] описал все тождества в полугруппе преобразований P , имеющих вид S_{abc} . Тодоров [73, 12A181] изучал полугруппы всех изотонных, всех антитонных и всех монотонных преобразований у. м., представляющего собой конечную цепь с произвольной совокупностью изолированных элементов. Полугруды гомоморфизмов у. м. (со скрещенным умножением) рассматривал Э. А. Бабаев [77, 2A197].

А. Л. Либих [74, 9A183] исследовала связь между квазиупорядоченными множествами P и Q такими, что полугруппа эндоморфизмов $\text{End } P$ гомоморфно отображается на полугруппу $\text{End } Q$. Э. А. Бабаев [77, 4A147] нашел полугруды гомоморфизмов, полностью характеризующую пару квазиупорядоченных множеств, и на ее языке выразил некоторые свойства соответствующих квазипорядков.

10. Д. И. Цейтлин [77, 8A256] называет оператор α на у. м. открываемым, если существует оператор $\overset{\circ}{\alpha}$ такой, что $\overset{\circ}{\alpha}(x)$ для $x \in P$ есть наибольший из α -неподвижных элементов, минорирующих x . Оказывается, оператор α на такой решетке открываем тогда и только тогда, когда $\alpha(0) = 0$ и супремум

любого множества α -неподвижных элементов сам является α -неподвижным элементом.

Оператор замыкания γ на инволютированном у. м. P с 1 называется s -замыканием, если $\gamma((\gamma((\gamma(x))'))') = \gamma(x)$ для любого $x \in P$ (штрихом обозначается инволюция). Рюттиман [75, 7A412] доказал, что инволютированное у. м. с 1 тогда и только тогда является ортомодулярной решеткой, когда каждый интервал вида $[x, 1]$ есть область значений некоторого оператора s -замыкания.

Предзамыкания (то есть идемпотентные эндоморфизмы) у. м. рассматривались Ладегелери [73, 12A308]. Ему удалось выяснить, когда область значений предзамыкания, определенного на полной решетке, будет ее полной подрешеткой. Венсан [76, 4A279] определяет верхнее и нижнее замыкания для данного оператора замыкания и исследует их свойства. Лапшер [74, 9A326] показал, что в у. м. всех замыканий на данном у. м. выполняется условие Жордана-Дедекинда.

11. Т. С. Фофанова [74, 9A320] ввела понятие свободного расширения данного частичного полигона над дистрибутивной решеткой с 0 и 1 и доказала существование такого расширения. В этой же работе ею решена задача о вложении амальгамы упорядоченных множеств в у. м. Из полученных результатов выводится, что в категории всех полигонов над дистрибутивной решеткой эпиморфизмы совпадают с наложениями. Беран [75, 4A337] доказал существование амальгамы семейства упорядоченных множеств относительно семейства порядковых гомоморфизмов и установил условия, необходимые и достаточные для того, чтобы амальгама семейства решеток была решеткой.

Следующий факт доказал Шмуель [76, 12A381]: всякая связь Галуа между у. м. P и Q может быть однозначно продолжена до связи Галуа между пополнениями P и Q сечениями. Кардинальные суммы и прямые произведения для связей Галуа строила Лизá [74, 1A289]. Различного рода связи (то есть пары встречных изотонных отображений двух у. м.) рассматривались Бенадо [74, 1A288].

12. Грин [73, 8A262] исследует возможность продолжения отображения одного конечного у. м. в другое до гомоморфизма алгебр Мёбиуса этих у. м., а также приводит некоторые тождества, имеющие место во всех алгебрах Мёбиуса.

Структуры, связанные с порядками, изучали Георгеску [76, 4A277] и Хенсаул [76, 2A403; 5A185; 77, 10A198].

Ажендорф [74, 2A291] для некоторых квазипорядков над

цепями доказал свойства, аналогичные условию Жордана-Дедекинда. Центральные операции для полного конечного квазипорядка ввел Бартелеми [77, 12A293], обобщив при этом аналогичные свойства, которые для у. м. установили Фельдман [74, 7B546] и Монжарде [74, 7B541]. Егер и Парк [75, 10A316] нашли изоморфное представление квазиупорядоченного множества специальным образом упорядоченными числовыми последовательностями. Представлениями произвольных квазипорядков на множестве действительных чисел занимались Маюмдар и Сен [77, 8A341]. Кольца инцидентности квазиупорядоченных множеств изучал Белдинг [74, 6A389]. Якубик [74, 12A59] получил ряд результатов о квазипорядке (вложение) на множестве всех неизоморфных типов, направленных вверх у. м. ограниченной мощности.

Некоторые n -арные аналоги порядков ввел Мюллер [75, 5A279].

II. Полурешетки

1. Определение полурешетки одной (решетки—двумя) аксиомами специфического «глобального» характера предлагает Петку [73, 8A266]. Джонсон и Макморрис [75, 5A151] показали, что если в полугруппе S каждый левый сдвиг является ретракцией, то S — полурешетка.

Летч [77, 1A295] установил, что в категории полных V -полурешеток произведения совпадают с копроизведениями. Джонсон и Макморрис описали вполне циклически инъективные [73, 7A299] и слабо самоинъективные [74, 10A300] полурешетки.

Булман-Флеминг^{*14} показал, что V -полурешетка эквивалентно компактна тогда и только тогда, когда она является ретрактом компактной топологической полурешетки. Нельсон [76, 8A405] для каждого бесконечного кардинала κ указал полурешетку мощности κ , не имеющую эквивалентно компактной оболочки (в классе всех полурешеток).

Фрейзер [76, 12A396] изучал тензорное произведение полурешеток (оно всегда существует и однозначно определяется сомножителями) и специально рассмотрел его свойства для случая, когда сомножители являются дистрибутивными решетками (класс дистрибутивных решеток оказался замкнутым относительно этой конструкции). В частности, установ-

^{*14} Bulman-Fleming S. — AU, 1972, v. 2, p. 146—151.

лено, что проективность тензорного произведения дистрибутивных решеток влечет проективность сомножителей, а если сомножители проективны и конечны, то их тензорное произведение проективно. В [77, 5A216] тот же автор предлагает еще два определения тензорного произведения полурешеток. Его статья [77, 12A310] носит обзорный характер.

2. Дуальное вложение полурешетки в решетку ее конгруэнций рассматривал Чао^{*15}. Янович [77, 2A300] доказал, что всякая полубулева алгебра (V -полурешетка, в которой каждый главный идеал есть булева решетка) может быть расширена до SM -полурешетки. Фляйшер [77, 1A293] заметил, что практически все результаты, касающиеся вложения полурешетки в дистрибутивную решетку, содержатся в известной работе Макнила 1937 года.

3. Роудс [75, 7A418] доказал, что Λ -полурешетка модулярна тогда и только тогда, когда в ней существует верхняя грань для любой пары элементов и она не имеет ретрактов, изоморфных решетке M_5 . Эквивалентом же дистрибутивности полурешетки является ее модулярность плюс отсутствие ретрактов, изоморфных решетке M_3 .

Варле [76, 3A190], используя свойство делимости элементов полурешетки простыми фильтрами, рассмотрел различные определения дистрибутивности для полурешетки и связь между ними. Ли [76, 12A397], продолжая эти исследования, установил, что если в модулярной полурешетке S длины 2 для любых двух различных элементов существует разделяющий их простой фильтр, то либо S дистрибутивна, либо ее решетка фильтров содержит 10-элементную модулярную недистрибутивную подрешетку, диаграмма которой приводится.

Булман-Флеминг [77, 1A290] показал, что дистрибутивность Λ -полурешетки является следствием некоторого условия, связанного с разрешимостью систем полиномиальных уравнений с одним неизвестным над ней.

Гаскил [73, 12A306] многообразию V решеток сопоставляет некоторый класс D дистрибутивных V -полурешеток. В частности, им доказана эквивалентность следующих двух условий: 1) $S \in D$ тогда и только тогда, когда решетка идеалов $I(S) \in V$; 2) $S \in D$ тогда и только тогда, когда S есть прямой предел решеток из V , рассматриваемых как V -полурешетки.

Ниминен [77, 1A294] обнаружил, что в квазидистрибутив-

^{*15} Cha o D.— Tamkang J. Math., 1975, v. 6, p. 83—86.

ных (никакие два несравнимых элемента не имеют общей нижней грани) V -полурешетках конгруэнции, определяемые трансляциями, образуют подрешетку решетки всех конгруэнций.

4. Мурти и Рама Рао^{*16} рассмотрели конструкцию тройки для названных ими допустимыми полурешеток, которыми являются, в частности, все полурешетки с псевдодополнениями. Ниминен [76, 9A333] доказал, что в модулярной V -полурешетке с псевдодополнениями эквивалентны следующие условия: 1) $x^* \vee x^{**} = 1$; 2) $(x \wedge y)^* = x^* \vee y^*$ всегда, когда существует $x \wedge y$; 3) булева алгебра нормальных элементов является полурешеткой.

Бэлбс [73, 9A297] привел конструкцию свободной полурешетки с псевдодополнениями с конечным числом свободных порождающих и решил проблему тождества. Джоунс [75, 6A424] показал, что в свободной полурешетке с псевдодополнениями цепи не более чем счетны. Далее, всякая свободная булева алгебра реализуется как булева алгебра нормальных элементов некоторой свободной полурешетки с псевдодополнениями. Указан также критерий проективности в конечном случае и установлено, что булева алгебра проективна в категории булевых алгебр тогда и только тогда, когда она проективна в категории полурешеток с псевдодополнениями.

Ландольт и Уэйли [77, 1A291], используя результаты своей более ранней работы^{*17}, далее описание свободной импликативной полурешетки с тремя порождающими. Она имеет 623 662 965 552 330 элементов. Маргарис [74, 8A 289] решил проблему тождества для импликативных полурешеток.

Истхем и Нимитц [76, 2A387] обобщили понятие плотного и замкнутого элементов и теорему Гливенко на случай произвольных импликативных полурешеток. Варле [74, 6A339], используя понятие относительного аннигилятора в $\wedge$ -полурешетке, исследовал связь между дистрибутивностью полурешетки и импликативностью решетки ее идеалов. Нимитц [73, 11A296] ввел в импликативной полурешетке специальную тернарную операцию и исследовал аксиоматическую связь между импликативными полурешетками и связанными с ними тернарными операциями.

Яновиц [77, 1A292], продолжая свои исследования [76,

^{*16} Murty R. P. V., Rama Rao.—AU, 1974, v. 4, p. 289—300.

^{*17} Landolt W. J., Whaley T. P.—AU, 1974, v. 4, p. 166—184.

12A220], описал недистрибутивные модулярные SM -полурешетки, в которых определены объединения любого атома с каждым элементом.

5. Полурешетка называется равномерной, если любые два ее главные идеала изоморфны. Хики [74, 5A326] указал способ конструирования более сложных равномерных полурешеток, отправляясь от заданных.

Ниминен [76, 8A406], перенося на случай полурешеток понятие прямой суммы, установил, что модулярная V -полурешетка с 0 тогда и только тогда разложима в прямую сумму своих идеалов, когда этим свойством обладает решетка ее идеалов. Нейтральные идеалы V -полурешеток тот же автор исследует в [75, 12A296], а в его работе [76, 7A371] приведены некоторые простые модификации утверждений, доказанных Гретцером и Шмидтом для идеалов решеток [62, 10A191].

Пусть k — бесконечный регулярный кардинал. У. м. P называется k -полурешеткой, если для любого подмножества $S \subset P$, имеющего мощность меньше k , существует $\sup_P S$. Хефт [77, 1A283] описывает строение порядковой суммы k -полурешеток и их лексикографические идеалы.

Идеалы полурешеток с псевдодополнениями изучает Венкатанарасимхан [75, 2A340]. Пусть N — булева алгебра нормальных элементов такой полурешетки S . Если A идеал в N , то наименьший идеал A_e из S , содержащий A , называется расширением A . Оказывается, что отображение $A \rightarrow A_e$ есть вложение у. м. идеалов алгебры N в у. м. идеалов полурешетки S , сохраняющее пересечения и псевдодополнения, а также — в обе стороны — свойства простоты и нормальности. При этом каждый нормальный идеал из S является образом.

Полурешетка S с 0 называется дизъюнктивной, если для любых двух различных $x, y \in S$ существует $z \in S$ такой, что точно одно из пересечений $x \wedge z, y \wedge z$ обращается в 0 . Венкатанарасимхан [75, 5A288] показал, что полурешетка с 0 дизъюнктивна тогда и только тогда, когда каждый главный ее идеал является нормальным полуидеалом, и что свойство дизъюнктивности полурешетки в сочетании с наличием в ней псевдодополнений превращает ее в булеву алгебру. В этой же работе исследуются также свойства пространства простых полуидеалов полурешетки.

Следующие свойства произвольной конгруэнции θ в импликативной полурешетке эквивалентны (Барле, [74, 1A294]): 1) класс $\theta < 1 >$ есть узловой фильтр (то есть сравнимый по включению с любым другим фильтром); 2) θ сравнима с лю-

бой другой конгруэнцией; 3) θ имеет единственный неоднородный класс.

Различающие подмножества в полурешетках рассматривали Заплетал [74, 12A231; 76, 4A287] и Ниминен [76, 11A377]. Зелинка [75, 12A295] показал, что на полурешетке с более чем двумя элементами существуют стабильные толерантности, не являющиеся конгруэнциями.

6. Нормирования в V -полурешетках и связанные с ними метрики изучались Борде [77, 12A294]. Бруальди [75, 5B506] найдены необходимые и достаточные условия, которым должна удовлетворять градуированная полурешетка замкнутых множеств матроида, чтобы последний был трансверсальным.

Розенберг [75, 3A362] обобщил на случай вполне упорядоченного множества результаты Янагимото и Окамото [70, 8B123] о полурешеточной структуре на множестве перестановок конечного множества.

Алгебры, построенные на основе полурешетки, рассматривали Арбиб и Мейнс [77, 3A265] и Танака [76, 8A408].

III. Обобщения решеток

1. Почтибулевой алгеброй называется алгебра $A = (A, V, \wedge, ', 0, 1)$ типа $(2, 2, 1, 0, 0)$ такая, что любая ее 2-порожденная подалгебра является булевой алгеброй. Куэйкенбуш [75, 6A423] показал, что существуют конечные почтибулевы, но не булевы алгебры. Наименьший возможный порядок равен 16.

Крегер [74, 1A239] каждой ортомодулярной решетке взаимно однозначно сопоставляет алгебру (булева R -косая решетка), однотипную с булевой, изучает свойства таких алгебр и отмечает их связь с квантовологическими понятиями.

2. Герхардтс [73, 10A269] для косой (некоммутативной) решетки с условиями $a \wedge (b V a) = a \wedge (a V b) = (a \wedge b) V a = (b \wedge a) V a = a$ исследовал вопрос о том, не повлечет ли коммутативность присоединение к этим условиям любой дополнительной аксиомы, — и отрицательно ответил на него, приведя соответствующие примеры. Артиага^{*18} показал, что отношение $\leq = \{(a, b) : a \wedge b \wedge a = a\}$ на такой алгебре является квазипорядком, а фактор по ассоциированной с ним эквивалентности есть решетка.

Славик [73, 11A282; 74, 2A289] предложил метод, позволя-

^{*18} Artia ga L.— Carribean J. Sci. Math., 1972 v. 2, N 1, p. 9—16.

ющий перенести некоторые типы теорем теории решеток на косые решетки.

Исследуя N -косые (то есть с тождествами $x \wedge (x \vee y) = (y \wedge x) \vee x = x$, $x \wedge (y \wedge z) = x \wedge (z \wedge y)$, $(x \vee y) \vee z = (y \vee x) \vee z$ решетки), Хавиар [74, 4A241] выделил класс квазиупорядоченных множеств; между ним и классом N -косых решеток устанавливается взаимно однозначное соответствие. Это обобщает аналогичные построения Герхардтса [70, 2A268] на более широкий класс косых решеток.

Некоторые свойства гомоморфизмов косых решеток Йордана [58, 5572] изучал Фаркаш [74, 12A223]. Алгебры, близкие косым решеткам Йордана, рассматривались Крегером [75, 3A359].

Фаркаш [76, 1A327] для трех типов косых решеток построил теорию идеалов, параллельную, но во многом отличную от теории идеалов решеток. В [73, 4A419] этим автором было введено 12 типов косых решеток. В [76, 1A328] для них определяются 8 бинарных отношений, роль которых аналогична роли отношений порядка в теории решеток.

Крегер [77, 3A262] показал, что добавление любого из свойств ассоциативности, дистрибутивности, коммутативности достаточно для того, чтобы булева косая решетка превратилась в обычную решетку.

Еще один тип некоммутативных решеток введен в работе да Кошты*¹⁹. Для них сформулированы принцип двойственности и принцип транспозиции Дедекинда.

3. Значительное внимание привлекали в рассматриваемый период слабоассоциативные решетки (с. а. р., — в обзоре [76, 10A201] они назывались неассоциативными решетками).

В статье Скалы*²⁰ и ее книге [73, 1A289] для этих алгебр найдены аналоги почти всех основных теорем теории решеток. Оказалось также, что многие добавочные условия (дистрибутивность, например) влекут в с. а. р. ассоциативность, то есть превращают ее в решетку. Фрид и Гретцер [73, 12A314] показали, что каждая с. а. р. имеет максимальный решеточный гомоморфный образ.

Варле [76, 7B384] изучал конгруэнции, идеалы и фильтры турниров, — так называются с. а. р. — аналоги цепей. Хайда [76, 3A331] получил разложение в прямое произведе-

*¹⁹ Da Costa R. P.— An Sci. Univ. Porto, 1974, v. 57, N 1—4, p. 163—172.

*²⁰ Scala H.— AU, 1971, v. 1, p. 218—233.

ние сюръективных гомоморфизмов для конечных прямых произведений турниров.

Вопрос о существовании объединений и пересечений нескольких (более чем двух) элементов в с. а. р. исследовал Фрид [75, 1A375]. Связь между с. а. р. и специальными проективными плоскостями установили Фрид и Сос [76, 2A388]. Примеры с. а. р., связанные с факторизацией рациональных чисел и с алгебраическими расширениями полей, привел Фрид [76, 8A399]. Полные с. а. р., конечной длины охарактеризовал Гладстейн *²¹.

Фрид *²² изучал класс с. а. р., обладающих свойством продолжаемости конгруэнций, и описал [76, 3A330] подпрямо неразложимые с. а. р. с этим свойством. Неизвестно, будет ли упомянутый класс многообразием.

Фрид и Гретцер [74, 9A341] рассматривают многообразие с. а. р., порожденное трехэлементной с. а. р. $A \{0, 1, 2\}$, где

$$0 \wedge 1 = 0, 0 \vee 1 = 1 \wedge 2 = 1, 1 \vee 2 = 2 \wedge 0 = 2 \vee 0 = 2.$$

Это многообразие содержит все дистрибутивные решетки. Фрид [76, 4A284] построил многообразие с. а. р., не содержащее ни одного из известных четырех многообразий с. а. р., покрывающих многообразие дистрибутивных решеток.

Необходимые и достаточные условия существования на с. а. р. стабильной толерантности, не являющейся конгруэнцией, нашли Хайда и Зелинка [77, 1A280].

Фрид и Гретцер [77, 9A374] показали, что любая частичная с. а. р. вкладывается в с. а. р., причем конечная в конечную. Свободная с. а. р. ранга 2 содержит свободную с. а. р. счетного ранга. Любая конечная (счетная) с. а. р. вложима в 2-порожденную конечную (счетную) с. а. р.

Еще один тип неассоциативных решеток (где обе операции коммутативны и удовлетворяют законам поглощения) рассматривал Собоциньский [77, 9A360; 361]. В частности, во второй работе он исследовал для них взаимосвязь таких условий, которые в случае решеток являются эквивалентами модулярности.

4. Дистрибутивные квазирешетки — это алгебры в сигнатуре решетки, описываемые нормальными (регулярными) тождествами многообразия дистрибутивных решеток. Ниминен [77, 12A309] рассмотрел два типа идеалов дистрибутивных

*²¹ Gladstein K.—AU, 1973, v. 3, p. 341—344.

*²² Fried E.—AU, 1974, v. 4, p. 151—162.

квазирешеток, а Кнебель [76, 9A332] уточнил для этих алгебр теорему о представлении Бэлбса [71, 3A247].

5. Цикл работ Клаучовой посвящен мультирешеткам. Это у. м., в котором для любых двух x, y в у. м. общих мажорант x и y каждый элемент содержит некоторый минимальный элемент, — и двойственно. В [76, 8A393] для мультирешеток введено отношение «между» и связанное с ним понятие b -эквивалентности. В [76, 11A370] при помощи отношения «между» охарактеризованы дистрибутивные направленные (вверх и вниз) мультирешетки, а работа [77, 11A329] переносит на этот случай теорему Жордана-Гельдера для прямых.

Радикалы и вычеты в q -решетках изучала Замбелли [74, 6A386]. Некоторые представления q -решеток получены ею в [75, 5A277].

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие	3
Пашенков В. В. Булевы алгебры	4
Эсакиа Л. Л. Алгебры логики	15
Фофанова Т. С. Общая теория решеток	26
Игошин В. И. Многообразия и квазимногообразия решеток	57
Житомирский Г. И. Решетки подмножеств	69
Артамонов В. А. Решетки многообразий	97
Либер С. А. Топология и порядок	107
Салий В. Н. Упорядоченные множества. Полурешетки. Обобщения решеток	121

УПОРЯДОЧЕННЫЕ МНОЖЕСТВА И РЕШЕТКИ

Современное состояние теории решеток

Межвузовский научный сборник

ИБ1340

Редактор Л. В. Аброськина
Технический редактор Л. В. Агальцова
Корректор С. Н. Мелешина

Сдано в набор 20.05.80. Подписано к печати 27.04.83. НГБ6290. Формат 60×84¹/₁₆.
Усл. печ. л. 8,37 (9). Уч.-изд. л. 8,4. Тираж 400. Заказ 6778. Цена 1 р. 30 к.

Издательство Саратовского университета,
410601, Саратов, Университетская, 42.
Типография издательства «Коммунист»,
410002, Саратов, Волжская, 28.

УДК 519.48

Булевы алгебры. Пашенков В. В. — В кн.: Упорядоченные множества и решетки. Изд-во Саратов. ун-та, 1981, вып. 7, с. 4—15.

Обзор по материалам реферативного журнала «Математика» за июль 1973 — декабрь 1977 гг.

УДК 519.48

Алгебры логики. Эсакиа Л. Л. — В кн.: Упорядоченные множества и решетки. Изд-во Саратов. ун-та, 1981, вып. 7, с. 15—26.

Обзор по материалам реферативного журнала «Математика» за июль 1973 — декабрь 1977 гг.

УДК 519.48

Общая теория решеток. Фофанова Т. С. — В кн.: Упорядоченные множества и решетки. Изд-во Саратов. ун-та 1981, вып. 7, с. 26—57.

Обзор по материалам реферативного журнала «Математика» за июль 1973 — декабрь 1977 гг.

УДК 519.48

Многообразия и квазимногообразия решеток. Игошин В. И. — В кн.: Упорядоченные множества и решетки. Изд-во Саратов. ун-та, 1981, вып. 7, с. 57—68.

Обзор по материалам реферативного журнала «Математика» за июль 1973 — декабрь 1977 гг.

УДК 519.48

Решетки подмножеств. Житомирский Г. И. — В кн.: Упорядоченные множества и решетки. Изд-во Саратов. ун-та, 1981, вып. 7, с. 69—97.

Обзор по материалам реферативного журнала «Математика» за июль 1973 — декабрь 1977 гг.

УДК 519.48

Решетки многообразий. Артамонов В. А. — В кн.: Упорядоченные множества и решетки. Изд-во Саратов. ун-та, 1981, вып. 7, с. 97—106.

Обзор по материалам реферативного журнала «Математика» за июль 1973 — декабрь 1977 гг.

УДК 519.48

Топология и порядок. Л и б е р С. А. — В кн.: Упорядоченные множества и решетки. Изд-во Саратов. ун-та, 1981, вып. 7, с. 106—121.

Обзор по материалам реферативного журнала «Математика» за июль 1973 — декабрь 1977 гг.

УДК 519.48

Упорядоченные множества. Полурешетки. Обобщения решеток. С а л и й В. Н. — В кн.: Упорядоченные множества и решетки. Изд-во Саратов. ун-та, 1981, вып. 7, с. 121—142.

Обзор по материалам реферативного журнала «Математика» за июль 1973 — декабрь 1977 гг.

1 р. 30 к.

ИЗДАТЕЛЬСТВО
САРАТОВСКОГО
УНИВЕРСИТЕТА
1983